Die

Archimedische Spirale

mit

Rücksicht auf ihre Geschichte.

Von

Fr. X. Lehmann.

Als Beilage zu dem Freiburger Lyceums-Programme
von 1862.

11.

A.

Die Archimedische Spirale vor der Aufstellung des Infinitesimalcalculs.

I. Sätze des Archimedes.

Die ersten uns erhaltenen Untersuchungen über die sogenannten Spirallinien oder Spiralen hat Archimedes in einer besonderen an den Dositheos gerichteten Schrift „περὶ ἑλίκων" angestellt. In der Einleitung derselben sagt Archimedes, daß er mit der Verbreitung dieser Sätze gezögert habe, weil er sie zuvor denjenigen überlassen wollte, die sich mit ähnlichen Dingen beschäftigen. So habe Konon [1]) seine Zeit auf solche Untersuchungen verwendet, aber weil ihn der Tod

---

[1]) Nizze hat gezeigt, daß die Sätze über diese Curve nicht von Konon aufgestellt wurden. Uebersetzung der vorh. Werke des Archimedes. Stralsund 1824. Anm.

zu frühe ereilte, vieles noch in Dunkelheit gehüllt, zurückgelassen. Außer Konon kenne er aber niemanden, der sich auch nur mit einem der Probleme dieser Schrift befaßt habe. Archimedes zählt nun einige schon früher aufgestellte Sätze auf, die aber keine Beziehung zur Spirale haben, und theils noch unbewiesen, theils aber auch unrichtig sind, mit der Bemerkung: er habe diese bewiesen oder widerlegt um diejenigen zu beschämen, welche sich rühmen alles beweisen oder erfinden zu können. Die Sätze und Hilfssätze, welche Archimedes selbst aufstellt sind im Folgenden angegeben.

1) Wenn sich ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit in irgend einer Linie bewegt und man in dieser Linie zwei Linien annimmt, so haben diese angenommenen dasselbe Verhältniß wie die Zeiten, in welchen sie der Punkt durchlauft.

Bewegt sich der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Linie **AB** (Fig. 1) und nimmt man in derselben die Linien **GH** und **HI** an, ist ferner die Zeit, in welcher **GH** durchlaufen wird **KL**, und für **HI** die Zeit **LM**, so muß:

$$GH : HI = KL : LM.$$

Denn es sei die Linie **AH** durch Wiederholung von **GH** und **CL** durch gleiche Wiederholung von **KL** enstanden, ebenso **HB** durch **HI** und **LD** durch **LM**, jedoch so, daß $AH > HB$, dann ist $AH : CL = HB : LD$; Eucl. V, 5 u. 6.

$$GH : KL = HI : LM \text{ oder}$$

$$GH : HI = KL : LM.$$

2) Wenn sich von zwei Punkten ein jeder in einer besonderen Linie und mit besonderer aber gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt und wenn in jeder von beiden Linien zwei Linien angenommen werden, so daß beide Paare in gleichen Zeiten durchlaufen werden von den Punkten, so haben die angenommenen Linien dasselbe Verhältniß.

Die gegebenen Linien seien **AB** und **CD** (Fig. 1), die angenommenen in der ersteren: **GH** und **HI**; die in der anderen: **KL** und **LM**; **GH** und **KL** werden in der Zeit **EN** durchlaufen; **HI** und **LM** in der Zeit **NF**; dann ist:

$GH : HI = KL : LM$; denn nach 1. ist
$GH : HI = EN : NF$ und
$KL : LM = EN : NF$ also auch
$GH : HI = KL : LM$.

3) Wie viele Kreislinien auch gegeben sind, so ist es doch möglich, eine gerade Linie anzunehmen, die größer ist als die Kreislinien zusammengenommen.

Es ist nämlich der Umfang eines Vieleckes, welches um einen Kreis beschrieben ist, größer als die Kreislinie; wäre nun um eine jede Kreislinie ein Vieleck beschrieben, so muß die Summe aus allen Vielecksseiten größer sein als die Summe aus den Kreislinien, also ist auch die gerade Linie, welche der Summe aus allen Vielecksseiten gleich ist, größer als die Summe aus allen Kreislinien.

4) Sind zwei ungleiche Linien, eine gerade und eine Kreislinie gegeben, so ist es möglich, eine gerade Linie anzunehmen, welche größer ist als die kleinere und kleiner als die größere.

Setzt man nämlich einen Theil der Differenz beider gegebenen Linien an die kleinere oder nimmt ihn von der größeren weg, so erhält man eine Linie, die größer ist als die kleinere und kleiner als die größere.

5) Wenn eine Kreislinie mit einer Tangente gegeben ist, so kann man vom Mittelpunkte aus gegen die Tangente eine gerade Linie so ziehen, daß das Verhältniß aus dem Theile derselben, welcher zwischen dem Kreise und der Tangente liegt, und dem Radius kleiner ist als das Verhältniß des zwischen dem Berührungspunkte und der gezogenen Linie liegende Bogen und einem gegebenen Kreisbogen.

Die gegebenen Stücke sind: **ABC** (Fig. 2) die Kreislinie; **BF** Tangente; **B** Berührungspunkt; **S** Kreisbogen; es sei $S < R$ und $R = GO$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **GKO** und **BFO** folgt:

$$FO : OK = BO : GO.$$

Da aber der Bogen **BO** größer ist als die Sehne **BO** und $OG = R > S$, so ist:

[1]) $FO : OK < \text{arc. } BO : S.$

---

[1]) Einen anderen Beweis hat Nizze gegeben.

6) Wenn eine Kreislinie gegeben ist und in derselben eine Sehne, die kleiner ist als der Durchmesser, so kann man einen Radius ziehen, welcher die Sehne so schneidet, daß der zwischen Sehne und Kreis liegende Theil derselben, mit der Sehne, welche vom Endpunkte des Radius zum einen Endpunkte der gegebenen Sehne gezogen ist, ein gegebenes Verhältniß bildet; vorausgesetzt, daß dieses kleiner ist als das Verhältniß aus der gegebenen Halbsehne und der vom Centrum aus gezogenen Senkrechten.

Die gegebenen Theile sind: **ABC** (Fig. 2) Kreislinie; Sehne $HP < AC$; $\frac{R}{T} < \frac{PI}{KI}$; $AN \parallel HP$; $KI \perp HP$.
Nun ist $KPJ \sim KPL$; daher $PI : KI = PK : PL$, also

$R : T < PK : PL$ es sei aber

$R : T = DK : DN$ und $DN > PL$, dann ist:

$DK : DN = DE : DP$ also auch:

$R : T = DE : DP$.

7) Wenn dasselbe (wie in Satz 6) gegeben und die Sehne verlängert ist, so läßt sich vom Mittelpunkte des Kreises eine Linie so an diese Verlängerung ziehen, daß der Abschnitt zwischen Sehne und Kreis mit der Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte der Sehne und dem Durchschnittspunkt der gezogenen Linie mit dem Kreise ein gegebenes Verhältniß bilden; vorausgesetzt, daß dieses größer ist als das Verhältniß aus der Halbsehne und der vom Mittelpunkte auf sie gezogenen Senkrechten.

Es sei (Fig. 2) $\frac{T}{R} > \frac{PI}{KI} = \frac{PK}{PL}$; ferner $OZ < PL$ und

$$T : R = KP : OZ;$$ da aber $KP = KO$, so ist:

$$T : R = KO : OZ$$

$$KO : OZ = OV : OP$$ also:

$$T : R = OV : OP.$$

8) Wenn dasselbe (wie in Satz 6) gegeben ist und außerdem an einem Endpunkte der Sehne eine Tangente, so läßt sich vom Mittelpunkte aus eine Linie so ziehen, daß der zwischen dem Kreis und der Sehne liegende Abschnitt mit dem von der Tangente abgeschnittenen Theile ein gegebenes Verhältniß bildet; vorausgesetzt, daß dieses kleiner ist als das aus der Halbsehne und der vom Mittelpunkt auf sie gezogenen Senkrechten.

Es seien gegeben: (Fig. 3) Kreislinie AHP; Sehne $HP < AC$; Tangente QL und $\frac{R}{T} < \frac{PI}{KI} = \frac{PK}{PL}$, es sei ferner

$$R : T = KP : PQ$$ und $PQ > PL$, es ist nun:

$$MQ \, . \, LM : KU \, . \, LM = MQ : KU$$ und

$$KM \, . \, MW : KM \, . \, PL = MW : PL;$$ nun ist aber:

$$MQ \, . \, LM = KM \, . \, MW$$ und $KU \, . \, LM = KM \, . \, PL$, weil

$$KML \sim UMP,$$ also:

$$MW : PL = MQ : KU$$ und

$$PX : PL = PQ : KP = PQ : KY = MQ : KU;$$ daher

auch $PM : UY = PQ : KP = T : R.$

9) Wenn dasselbe (wie in Satz 8) gegeben ist, so kann man einen Radius bis an die verlängerte Sehne so ziehen, daß der Abschnitt zwischen verlängerter Sehne und Kreis mit dem durch den gezogenen Radius abgeschnittenen Theil der Tangente ein gegebenes Verhältniß bilde; vorausgesetzt, daß dieses größer ist als das der Halbsehne zu der aus dem Mittelpunkte auf sie gezogenen Senkrechten.

Es sei gegeben: (Fig. 3 a) Kreislinie **AHC**; Sehne $HP < AC$; Tangente **PL**; $\frac{T}{R} > \frac{PI}{KI}$; ferner soll $\frac{KP}{PQ} = \frac{T}{R}$, $QP < PL$, und **KW** so gezogen sein, daß $bW = PX$ wird.

Es ist nun $Qb \,.\, bL : bL \,.\, KV = Qb : KV$, aber

$Qb \,.\, bL = Kb \,.\, bW$; $bL \,.\, KV = Kb \,.\, PL$,

weil $KV : Kb = PL : bL$, werden die gefundenen Werthe in die erste Proportion eingeführt, so ist:

$Kb \,.\, bW : Kb \,.\, PL = Qb : KV$

$bW : PL = Qb : KV$, oder weil $bW = PX$:

$PX : PL = Qb : KV$. Es ist aber auch:

$PX : PL = QP : KO$, also

$Qb : KV = QP : KO$ oder

$Qb : QP = KV : KO$ und

$Pb : OV = PQ : KP = R : T$ also

$OV : Pb = T : R.$

10) Nimmt man eine Reihe ihrer Größe nach verschiedener gerader Linien so an, daß die folgende immer um die

kleinste größer ist als die vorhergehende und ebenso viele andere gerade Linien, welche einzeln der größten von jenen gleich sind, so ist die Summe der Quadrate dieser gleichen nebst dem Quadrate der größten von jenen und dem Rechtecke aus der kleinsten und der Summe aller ungleichen, dreimal so groß als die Summe der Quadrate aus den ungleichen Linien.

Es seien gegeben die Linien a, $b = 2a$, $c = 3a$, ... $h = 8a$ (Fig. 4), ferner: $i = a$, $k = b$, $l = c$, $m = d$, $n = e$, $o = f$, $p = g$.

Nun ist:

$$\begin{aligned} h^2 &= h^2 \\ (g+i)^2 &= g^2 + 2gi + i^2 \\ (f+k)^2 &= f^2 + 2kf + k^2 \\ &\vdots \\ (a+p)^2 &= a^2 + 2ap + p^2 \\ h^2 &= h^2, \end{aligned}$$

also $h^2 + (g+i)^2 + (f+k)^2 + \ldots + (a+p)^2 + h^2 = 2(h^2 + g^2 + \ldots + b^2 + a^2) + 2gi + 2fk + \ldots + 2ap$; da aber

$$\left.\begin{array}{l} 2gi + 2fk + \ldots + 2ap \\ + a(a + b + \ldots + g + h) \end{array}\right\} = h^2 + g^2 + \ldots + b^2 + a^2,$$

so ist auch: $h^2 + (g+i)^2 + (f+k)^2 + \ldots + (a+p)^2 + h^2 + a(a + b + \ldots + g + h) = 3(h^2 + g^2 + \ldots + b^2 + a^2)$.

Ein anderer Beweis dieses Satzes ist folgender:

Sind die gegebenen Linien: a_1, a_2, a_3, ... a_n und nach der Annahme: $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1$, ... $a_n = na_1$, so ist

die Summe aus den Quadraten dieser Linien: $S_1 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots + a_n{}^2 = a_1{}^2 + 4\,a_1{}^2 + 9\,a_1{}^2 + \ldots + n^2 a_1{}^2$ oder

$$S_1 = a_1{}^2 \frac{(n(n+1)(2n+1)}{1\;.\;2\;.\;3}.$$

Die Summe der Quadrate aus den gleichen Linien und der größten der ungleichen ist:

$$S_2 = n\,a_n{}^2 + a_n{}^2 = (n+1)\,a_n{}^2 \text{ oder}$$

$$S_2 = (n+1)\,n^2\,a_1{}^2.$$

Das Rechteck aus der kleinsten und allen ungleichen Linien ist:

$$S_3 = a_1\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_1{}^2(1+2+3+\ldots+n)$$

oder: $S_3 = a_1{}^2 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$

Daher $S_2 + S_3 = a_1{}^2 \frac{n(n+1)}{2} + a_1{}^2 n^2 (n+1) =$

$$a_1{}^2 \left(\frac{n(n+1) + 2n^2(n+1)}{2}\right) \text{ oder}$$

$$S_2 + S_3 = a_1{}^2 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right) \text{ also:}$$

[1]) $S_2 + S_3 = 3\,S_1.$

Aus diesem Satze folgt:

a) Die Summe der Quadrate aus den gleichen Linien ist kleiner als die dreifache Summe der Quadrate aus den ungleichen.

b) Die Summe der Quadrate aus den gleichen Linien ist

---

[1]) Einen weiteren Beweis dieses und des folgenden Satzes gab Nizze.

größer als die dreifache Summe der Quadrate aus den ungleichen ohne das Quadrat der größten.

c) Wären auf allen diesen Linien ähnliche ebene Figuren beschrieben, so wäre der Flächeninhalt der auf den gleichen Linien beschriebenen zusammen kleiner als die dreifache Summe aus den Flächen, die auf den ungleichen Linien beschrieben sind, die erstere Summe dagegen größer als das Dreifache der letzteren ohne die Fläche auf der größten Linie.

11) Wenn dasselbe angenommen (wie in Satz 10), ohne daß aber die kleinste dem Unterschiede selbst gleich zu sein braucht, die Anzahl der gleichen Linien aber um 1 geringer ist als die Zahl der ungleichen, so ist das Verhältniß aus der Summe der Quadrate der gleichen Linien und der Summe der Quadrate aus den ungleichen ohne die kleinste, kleiner als das Verhältniß aus dem Quadrate der größten Linie und dem Rechtecke aus der größten und kleinsten nebst dem dritten Theile des Quadrates aus ihrem Unterschiede; dagegen ist aber das erstere Verhältniß größer als letzteres, wenn man von jenem nicht das Quadrat der kleinsten, sondern das der größten Linie entfernt.

Man erhält (Fig. 4):

$$\frac{h^2}{ha + \frac{1}{3}g^2} = \frac{(g+i)^2}{(g+i)\,a + \frac{1}{3}\,g^2}$$

$$\frac{h^2}{ha + \frac{1}{3}g^2} = \frac{(f+k)^2}{(f+k)a + \frac{1}{3}g^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$'' \qquad \frac{(p+a)^2}{(p+a)a + \frac{1}{3}g^2}, \text{ also}$$

$$\frac{(g+i)^2 + (f+k)^2 + \ldots + (a+p)^2}{a(g+i+f+k+\ldots+(a+p)) + \frac{1}{3}(g^2+g^2+\ldots+g^2)} = \frac{h^2}{ha + \frac{1}{3}g^2},$$

nun ist aber $h^2 + g^2 + \ldots + b^2 > a(g+i+f+k+\ldots+a+p) + \frac{1}{3}(g^2+g^2+\ldots+g^2) > g^2 + f^2 + \ldots + a^2$ und daher:

$$\frac{(g+i)^2 + (f+k)^2 + \ldots + (a+p)^2}{h^2 + g^2 + \ldots + b^2} < \frac{h^2}{ha + \frac{1}{3}g^2} < \frac{(g+i)^2 + (f+k)^2 + \ldots + (a+p)^2}{g^2 + f^2 + \ldots + a^2}.$$

Aus diesem Satze folgt der folgende:

Werden auf diesen Linien ähnliche Figuren beschrieben, so ist das Verhältniß aus der Summe aller der Flächen, die auf den gleichen beschrieben sind, und der Summe der Flächen auf den ungleichen ohne die kleinste, kleiner; dagegen das Verhältniß aus der ersteren Summe und der letzteren ohne die größte, größer als das Verhältniß aus dem Quadrate der größten zu dem Rechtecke aus der größten und kleinsten, nebst dem dritten Theile des Quadrates aus dem Unterschiede der größten und kleinsten.

Definitionen.

a) Wenn eine gerade Linie an einem Punkte fest ist und sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Ebene um diesen Punkt bewegt, wenn sich ferner ein anderer Punkt von dem festen aus in der geraden ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Spirale (ἕλιξ).

b) Der feste Punkt ist Anfangspunkt der Spirale.

c) Die erste Lage der geraden Linie ist der Anfang der Windung.

d) Die gerade Linie, welche der bewegliche Punkt während des ersten Umlaufes zurücklegt, ist die erste gerade Linie, die welche er während des zweiten Umlaufes zurücklegt, zweite gerade Linie u. s. f.

e) Die Fläche, welche von der ersten Windung der Spirale und der ersten geraden begrenzt ist, heißt erste Spiralfläche, die welche von der zweiten Windung der Spirale und der zweiten geraden begrenzt ist, heißt zweite Spiralfläche und ähnlich die folgenden.

f) Wenn aus dem Anfangspunkt der Spirale eine gerade Linie an dieselbe gezogen wird, so heißt der Theil der Spirale, nach welcher die Bewegung gerichtet ist, der vorwärts liegende und der andere der rückwärts liegende.

g) Wird mit der ersten geraden um den Anfangspunkt der Spirale ein Kreis beschrieben, so ist dies die erste Kreis-

linie, der welcher mit der ersten und zweiten geraden um denselben Punkt beschrieben ist, heißt zweite Kreislinie und ähnlich die folgenden.

12) Die aufeinander folgenden Vectoren, welche gleiche Winkel bilden, nehmen um die gleiche Größe zu.

Nach der Annahme ist $\alpha = \beta = \gamma$, (Fig. 5), und dann muß **AG** — **AF** = **AF** — **AE** = **AE** — **AD** = ... sein.

Folgt aus Definition a und Satz 1.

13) Eine gerade Linie kann die Spirale nur an einem Punkte berühren.

Die gegebene Spirale sei **ABCD**; die gerade Linie **HK**, (Fig. 6).

Würde **HK** die Spirale in zwei Punkten etwa in **C** und **B** berühren, so wäre, wenn Winkel **BAC** durch **AZ** halbirt wird, nach Satz 12:

AC — **AZ** = **AZ** — **AB** oder

AC + **AB** = 2**AZ**, dies widerspricht aber dem Satze der Planimetrie:

AC + **AB** > 2**AZ**, also können auch **C** und **B** nicht Berührungspunkte sein.

14) Die Vectoren der ersten Windung verhalten sich wie die Bogen der ersten Kreislinie von der ersten geraden an vorwärts bis zu den Durchschnittspunkten der verlängerten Vectoren gerechnet.

Ist **A** (Fig. 6) Anfangspunkt, **ADG** erste Windung; **AG** erste gerade, Linie **GIM** erste Kreislinie, so ist:

$$AC : AD = \text{Bogen } GIL : \text{Bogen } GIM.$$

Folgt aus Def. a und Satz 2.

15) Die Vectoren der zweiten Windung verhalten sich wie die Summen aus der ganzen ersten Kreislinie und den Bogen derselben von der ersten geraden an vorwärts bis zu den Durchschnittspunkten der entsprechenden Vectoren.

Wenn dasselbe gegeben ist, wie in Satz 14, außerdem die zweite Windung $GI_1\ D_1\ G_1$, so ist, (Fig. 6)

$$AC_1 : AD_1 = (\text{Kreislinie } GIMG + \text{Bogen } GIL) : (\text{Kreislinie } GIMG + \text{Bogen } GIM).$$

Archimedes folgert dies ebenfalls aus Def. a und Satz 2.

Aehnliches findet auch für die folgende Windung statt.

Die Vectoren verhalten sich also überhaupt wie die Summen aus der ganzen ersten Kreislinie, diese einmal weniger zu sich selbst gezählt als die Windungszahl Einheiten hat, und den Bogen der ersten Kreislinie von der ersten geraden vorwärts bis zu den Durchschnittspunkten der entsprechenden Vectoren.

16) Die Winkel, welche eine Tangente an der ersten Windung der Spirale mit dem zugehörigen Vector bildet, sind ungleich, der größere ist vorwärts, der kleinere rückwärts gelegen.

Die erste Windung der Spirale sei **ADG**, **NO** die Tangente (Fig. 6).

Es ist nun Winkel $NDA > 90° > ODA$.

Wäre der Winkel $NDA = 90°$, so wäre NO eine Tangente der Kreislinie $DRQD$, alsdann läßt sich Satz 5 anwenden, wornach:

$NP : AP <$ Bogen PD : Bogen DRQ, daher auch

$AN : AP <$ Bogen $PDRQ$: Bogen DRQ.

Es ist aber Bogen $PDRQ$: Bogen DRQ = Bogen $SMIG$: Bogen $MIG = AE : AD$ nach Satz 14; also $AN : AP < AE : AD$ oder weil $AP = AD$, so ist $AN < AE$, was unmöglich ist, weil ON die Spirale schneiden müßte; der Winkel NDA ist also jedenfalls kein Rechter.

Da $AE > AD > AC$, so kann NDA auch nicht kleiner sein als $90°$ (Eucl. III., 16), also ist $NDA > 90° > ODA$.

17) Dasselbe, wie in Satz 16, findet auch statt, wenn eine Tangente die Spirale an ihrer zweiten Windung berührt.

Wenn (Fig. 6) $G D_1 G_1$ die zweite Windung der Spirale und $N_1 O_1$ die Tangente, so ist der Winkel $N_1 D_1 A > 90° > O_1 D_1 A$. Wäre $N_1 D_1 A = 90°$, so wäre $N_1 O_1$ Tangente des Kreises $C_1 P_1 \gamma$.

Nach Satz 5 erhält man nun:

$N_1 P_1 : P_1 A <$ Bogen $D_1 P_1$: (Kreislinie $C_1 P_1 \gamma C_1$ + Bogen $D_1 C_1 \gamma$), also auch $AN_1 : P_1 A <$ (Kreislinie $C_1 P_1 \gamma C_1$ + Bogeu $P_1 C_1 \gamma$) : (Kreislinie $C_1 P_1 \gamma C_1$ + Bogen $D_1 C_1 \gamma$) und (Kreislinie $C_1 P_1 \gamma C_1$ + Bogen $P_1 C_1 \gamma$) : (Kreislinie $C_1 P_1 \gamma C_1$ + Bogen $D_1 C_1 \gamma$) = (Kreislinie $GNIG$ +

Bogen **NIG**) : (Kreislinie **GNIG** + Bogen **MIG**) = $AE_1 : AD_1$, also wäre $N_1A : P_1A < AE_1 : AD_1$, da aber $P_1A = D_1A$, so müßte $N_1A < AE_1$, was unmöglich ist, also ist Winkel N_1D_1A kein Rechter; er ist aber auch kein spitzer Winkel, weil $AE_1 > AD_1 > A\alpha$; daher ist $N_1D_1A > 90^\circ > O_1D_1A$.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß diese Eigenschaft der Tangente auch bei jeder anderen Windung der Spirale gilt.

18) Wird an den Endpunkt der ersten Windung eine Tangente gelegt, so ist die zugehörige Subtangente gleich der ersten Kreislinie.

Gegeben sind: die erste Windung der Spirale **ABCG** und an ihrem Endpunkte die Tangente **GD**; die Subtangente **AD** $\perp$ **AG**. (Fig. 7).

Daß die Subtangente, welche durch den rückwärtsliegenden Theil der Spirale geht, von der Tangente durchschnitten werden muß, folgt aus Satz 16.

Wäre nun die Subtangente **AD** der ersten Kreislinie **GIL** nicht gleich, so müßte sie entweder größer oder kleiner sein als die Kreislinie.

a) Wäre **AD** größer als die Kreislinie, so läßt sich nach Satz 4 annehmen, daß **AD** > **AN** > **GIL**.

Die Tangente **GD** muß nun den Kreis schneiden und es sei dadurch die Sehne **GE** entstanden; **GE** < **GP**; ferner ist:

$\frac{AG}{AD} = \frac{GF}{AF}$; weil aber $AD > AN$, so ist auch

$AG : AN > GF : AF$; nach Satz 7 erhält man

$HM : AM =$ Sehne $GM : AN <$ Bogen GM : Kreislinie GIL,

also $HM : AM <$ Bog. GM : Kreisl. GIL

und $AH : AM <$ (Bog. GM + Kreisl. GIL) : Kreislinie $GIL = AK : AG$,

daher $AH : AM < AK : AG$, da aber $AM = AG$, so ist $AH < AK$, was unmöglich ist, daher kann auch AD nicht größer sein als die Kreislinie GIL.

b) Wäre AD kleiner als die Kreislinie, so läßt sich wieder nach Satz 4 annehmen, daß: $GIL > AO > AD$.

Es sei $GR \parallel AD$. Nun ist $AG : AD = GF : AF$, daher $AG : AO < GF : AF$.

Nun läßt sich Satz 8 anwenden, so daß (Fig. 7a u. Fig. 7)

$ST : Ge = AG : AO$ oder

$ST : (AG = AT) = Ge : AO >$ Bogen TG : Kreisl. GIL,

also $ST : AT >$ Bogen TG : Kreisl. GIL und

$- AS : AT >$ (Bog. TG − Kreisl. GIL) : Kreisl. GIL

od. $AT : AS >$ Krsl. GIL : (Krsl. GIL − Bg. TG) $= AG : AV$

$AT : AS > AG : AV$; da aber $AT = AG$, so ist $AV > AS$, was unmöglich ist, daher kann AD auch nicht kleiner sein als GIL; also muß die Subtangente der ersten Kreislinie gleich sein.

19) Wird an den Endpunkt der zweiten Windung eine Tangente gelegt, so ist die zugehörige Subtangente zweimal so groß als die zweite Kreislinie.

Gegeben seien: die zweite Windnng der Spirale **CDE**; die zweite Kreislinie **FEH**; die Tangente **GE**; die Subtangente **AG** $\perp$ **AE**. (Fig. 8).

Daß sich **AG** und **GE** schneiden müssen folgt aus Satz 17. Wäre nun die Linie **AG** nicht gleich 2. **FEH**, so müßte sie größer oder kleiner sein.

a) Wäre **AG** $>$ **2FEH**, so kann man **AK** nach Satz 4 so annehmen, daß **AG** $>$ **AK** $>$ 2. **FEH**.

Die Tangente **EG** muß die zweite Kreislinie schneiden, da **FE** $<$ **HE** und **AE** : **AG** $=$ **EM** : **AM** und **AE** : **AK** $>$ **EM** : **AM**, so läßt sich (nach Satz 7) **AN** so ziehen, daß:

$PN : PE = AE : AK$ oder

$PN : (AE = AP) = PE : AK <$ Bog. $PE : 2FEH$,

also $PN : AP <$ Bog. $PE : 2FEH$ und

$AN : AP < ($Bog. $PE + 2FEH) : 2FEH = AO : AE$;

$AN : AP < AO : AE$, weil aber $AP = AE$, so ist

$AN < AO$, was unmöglich ist, daher ist auch die Subtangente nicht größer als **2FEH**.

b) Aehnlich wie in 18, b, läßt sich auch zeigen, daß **AG** nicht kleiner sein kann als **2FEH**; also muß die Subtangente **AG** $=$ 2 **FEH** sein.

Auf gleiche Weise kann auch gezeigt werden, daß wenn an den Endpunkt irgend einer Windung eine Tangente gelegt wird, die zugehörige Subtangente gleich ist dem zugehörigen Kreise multiplicirt mit der Windungszahl.

20) Berührt eine Tangente die erste Windung zwischen ihrem Anfang und Endpunkte und beschreibt man mit dem Vector, welcher den Berührungspunkt mit dem Anfangspunkte verbindet, eine Kreislinie, so ist die Subtangente gleich dem Bogen dieses Kreises, welcher von der ersten geraden an nach vorwärts liegt und bis zum Berührungspunkte reicht.

Gegeben sei (Fig. 9): die erste Windung der Spirale **ABEG**; der Berührungspunkt **E**, zwischen **A** und **G**; die Tangente **HE** und die Subtangente **AH**.

Wäre nun die Subtangente **AH** dem Bogen **KLE** nicht gleich, so müßte sie entweder größer oder kleiner sein.

a) Wäre $AH > KLE$, so ließe sich, nach Satz 4, **AR** so annehmen, daß $AH > AR > KLE$ ist. Die Sehne $CE < EI$, ferner $AE : AH = ED : AD$ und $AE : AR > ED : AD$; nun läßt sich Satz 7 anwenden und man erhält: $PF : PE = AE : AR$ oder $PF : AP = PE : AR <$ Bog. $PE : KLE$, daraus $AF : AP <$ (Bog. $PE + KLE) : KLE = AO : AE$, also: $AF : AP < AO : AE$, weil aber $AP = AE$, so müßte $AF < AO$ sein, was unmöglich ist, daher kann auch **AH** nicht größer sein als der Bogen **KLE**.

b) Auf ähnliche Weise wie in Satz 18, b, läßt sich auch zeigen, daß **AH** nicht kleiner sein kann als der Bogen **KLE**, daher muß **AH** dem Bogen **KLE** gleich sein.

α) Berührt eine Tangente den zweiten Spiralbogen aber nicht in seinem Anfangspunkte oder Endpunkte, so ist die zugehörige Subtangente gleich der Summe aus der ganzen Kreislinie, welche mit dem an den Berührungspunkt gezogenen Vector beschrieben ist, und ihrem Bogen, welcher von der Anfangslinie an vorwärts liegt und bis zum Berührungspunkte reicht. Beweis ähnlich wie im vorhergehenden.

β) Berührt eine Tangente irgend einen Spiralbogen, so ist die zugehörige Subtangente gleich der Kreislinie, welche mit dem zum Berührungspunkte gehenden Vector gezogen ist, multiplicirt mit der um eine Einheit verminderten Windungszahl und noch dazu gezählt ihren Bogen, der von der Anfangslinie vorwärts liegt und bis zum Berührungspunkte reicht.

21) Die erste Spiralfläche läßt sich so in äußere und innere Kreissectoren zerlegen, daß der Unterschied zwischen der Summe aller äußeren und der Summe aller inneren Sectoren, kleiner ist als eine gegebene Fläche.

Es ist (Fig. 5) die erste Spiralfläche **ABG** und die erste Kreisfläche **GHN** gegeben. Der Quadrant **NAG** wird nun so oft halbirt, bis man Sectoren erhält, von denen ein jeder

kleiner ist als die gegebene Fläche; wenn diese Fläche $= \mathbf{S}$ ist, so ist der Sector $\mathbf{GAL} < \mathbf{S}$. Wird nun die Spiralfläche in innere und äußere Sectoren mit gleichen Centriwinkeln zerlegt, so ist:

$$\begin{aligned} fAF &= FAv, \\ eAE &= EAu, \\ dAD &= DAt, \\ &\vdots \\ zAx &= xAa, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$fAF + eAE + dAD + \ldots + zAx = FAv + EAu + DAt + \ldots + xAa.$$

Zur letzteren Summe gehört aber noch der Sector $\mathbf{GAL}$ also ist der Unterschied beider Summe $= \mathbf{GAL} < \mathbf{S}$.

22) Ebenso wie die erste Spiralfläche läßt sich auch die zweite zerlegen.

Die zweite Windung sei $\mathbf{GB_1G_1}$ und die zweite gerade $\mathbf{GG_1}$ (Fig. 5). Wird, wie in Satz 21, der Quadrant $\mathbf{N_1AG_1}$ durch fortgesetzte Halbirung so in Sectoren zerlegt, daß ein jeder kleiner ist als die gegebene Fläche $\mathbf{S_1}$, daß also $\mathbf{L_1AG_1} < \mathbf{S_1}$ und die inneren und äußeren Sectoren mit gleichen Centriwinkeln construirt, so ist:

$$\begin{aligned} f_1AF_1 &= F_1Av_1, \\ e_1AE_1 &= E_1Au_1, \\ &\vdots \\ gAM &= MAw, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$f_1 AF_1 + e_1 AE_1 + \ldots + g AM = F_1 Av_1 + E_1 Au_1 + \ldots + MAw$, zur ersteren Summe ist aber noch Sector **IAG** und zu letzterer $G_1 AL_1$ zu rechnen, da nun $G_1 AL_1 < S_1$, so muß um so mehr $G_1 AL_1 - IAG < S_1$ sein.

Was nun von der ersten und zweiten Spiralfläche gezeigt wurde, gilt auch von jeder folgenden.

23) Auch ein Spiralsector der ersten Spiralfläche, von dessen Vectoren ein jeder größer als 0 und kleiner als die erste gerade ist, läßt sich ebenso zerlegen wie die erste Spiralfläche.

Beweis wie in Satz 22.

Man kann also auch einen Spiralsector überhaupt so in äußere und innere Kreissectoren zerlegen, daß sowohl die Differenz aus der Summe aller äußeren Sectoren und dem Spiralsector, als auch die Differenz aus dem Spiralsector und der Summe aus allen inneren Kreissectoren kleiner ist als eine gegebene Fläche.

24) Die erste Spiralfläche ist dem dritten Theile der ersten Kreisfläche gleich.

Es sei **GBA** (Fig. 5) die erste Spiralfläche und **GHN** die erste Kreisfläche. Wäre nun **GBA** nicht gleich $\frac{1}{3}$ **GHN**, so müßte **GBA** entweder größer oder kleiner sein als $\frac{1}{3}$ **GHN**. Angenommen es sei:

a) $GBA < \frac{1}{3} GHN$.

Nach Satz 21 und 23, Zusatz, läßt sich die Spiralfläche in äußere Kreissectoren so zerlegen, daß die Differenz aus ihrer Summe und der Spiralfläche kleiner ist als die Differenz zwischen $\frac{1}{3}$ **GHN** und **GBA**, es muß daher auch die Summe aus allen äußeren Sectoren kleiner sein als $\frac{1}{3}$ **GHN**. Der größte Sector sei **GAL** und der kleinste **xAa**. Da nun die Winkel $\alpha = \beta = \lambda = \ldots$, und **AG** — **AF** = **AF** — **AE** = ... = **Ax**, ferner **AG** = **AL** = ... **AM**, und die Zahl der Vectoren der Anzahl der Radien gleich ist, so ist nach Satz 10, c, die Kreisfläche **GHN** < 3**GBA**, oder **GBA** > $\frac{1}{3}$ **GHN**, was der Annahme widerspricht, also kann die Spiralfläche nicht kleiner sein als der dritte Theil der ersten Kreisfläche.

b) Es sei **GBA** > $\frac{1}{3}$ **GHN**.

Nach Satz 21 und 23, Zusatz, läßt sich die Spiralfläche in innere Kreissectoren so zerlegen, daß die Differenz aus der Spiralfläche und der Summe aller dieser inneren Sectoren kleiner ist als die Differenz aus der Spiralfläche und dem dritten Theile der ersten Kreisfläche, es muß also auch die Summe aller dieser Sectoren kleiner sein als $\frac{1}{3}$ **GHN**. Der größte Sector sei **fAF** und der kleinste **xAz**; ferner sei, $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$; **AG** — **AF** = **AF** — **AE** = ... **Ax**; **AG** = **AL** = ... = **AM**.

Nun ist (nach Satz 10, b, c) $\frac{1}{3}$ **GHN** > **GBA** [1]),

[1]) Denn der auf dem größten Vector stehende innere Sector AGI gehört nicht mehr zur ersten Spiralfläche.

was der Annahme widerspricht. Es kann also GBA auch nicht größer sein als $\frac{1}{3}$ GHN.

Daher muß $GBA = \frac{1}{3}$ GHN sein.

25) Die Fläche der zweiten Windung verhält sich zur zweiten Kreisfläche wie 7 : 12. Ebenso verhält sich auch das Rechteck aus den Radien des ersten und zweiten Kreises und der dritte Theil des Quadrates aus dem Unterschiede dieser Radien zum Quadrate aus dem Radius des zweiten Kreises.

In Fig. 5 sei G_1K zweiter Kreis; GG_1 zweite gerade Linie; $G_1B_1GG_1$ die Fläche der zweiten Windung; der Kürze wegen sei $AG_1 \, . \, AG + \frac{1}{3} \, GG_1{}^2 = R^2$ gesetzt und R der Radius einer Kreisfläche S; es ist nun

S : Fläche $G_1N_1K = 7 : 12$; denn es ist:

S : Fläche $G_1N_1K = R^2 : AG_1{}^2 = (AG_1 \, . \, GA + \frac{1}{3}GG_1{}^2)$: $AG_1{}^2$, da aber $AG_1 = 2AG$ und $GG_1 = AG$ ist, so erhält man:

S : Fläche $G_1N_1K = (2AG^2 + \frac{1}{3}AG^2) : 4AG^2 = \frac{7}{3} \, AG^2$: $4AG^2$;

S : Fläche $G_1N_1K = \frac{7}{3} : 4 = 7 : 12$.

Nun ist zu beweisen, daß S der Fläche der zweiten Windung gleich ist.

a) Wäre S größer als die Fläche der zweiten Windung, dann läßt sich Satz 22 anwenden, so daß die Differenz aus der Summe aller äußeren Sectoren, von denen G_1AL_1 der größte und $MA\omega$ der kleinste ist, und der

Spiralfläche kleiner ist als die Differenz zwischen **S** und der Spiralfläche. **S** muß also größer sein als die Summe aus allen Sectoren. Nach Satz 11 erhält man nun:

Fläche G_1N_1K : Fläche $G_1B_1GG_1 < AG_1{}^2$: $(GA.AG_1 + \frac{1}{3}GG_1{}^2)$, also auch

Flche. G_1N_1K : Flche $G_1B_1GG_1 <$ Flche. $G_1N_1K : S$ und deßhalb

Fläche $G_1B_1GG_1 > S$, was der Annahme widerspricht.

b) Wäre **S** kleiner als die Fläche der zweiten Windung, so würde man mittels der Sätze 22 und 11 erhalten:

Fläche G_1N_1K : Fläche $G_1B_1GG_1 > AG_1{}^2 : (AG.AG_1 + \frac{1}{3}GG_1{}^2)$ und

Fläche G_1N_1K : Fläche $G_1B_1GG_1 >$ Fläche $G_1N_1K : S$.

also $S >$ Fläche $G_1B_1GG_1$; was der Annahme widerspricht; daher muß $S =$ Fläche $G_1B_1GG_1$ sein.

Ebenso ließe sich zeigen, daß irgend eine Fläche einer ganzen Windung sich zur größeren der beiden zugehörigen Kreisflächen verhalte, wie die Summe aus dem Rechtecke der Radien dieser Kreise und dem dritten Theile des Quadrates aus ihrem Unterschiede zum Quadrate aus dem Radius des größeren Kreises.

26) Ein Spiralsector der ersten Spiralfläche verhält sich zu dem Kreissector für denselben Centriwinkel und dessen Ra-

dius der größte Vector des Sectors ist, wie das Rechteck aus dem größten und kleinsten Vector nebst dem dritten Theile des Quadrates aus ihrem Unterschiede zum Quadrate des größten Vectors.

Zu beweisen ist, daß:

Flch. $FBAF$: Flch. $FQAF = (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2) : AF^2$ (Fig. 5).

Wäre U ein Sector und das Quadrat seines Radius $= AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2$, so wäre:

U : Fläche $FQAF = (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2) : AF^2$, und nun ist zu zeigen, daß $U =$ Fläche $FBAF$ sein muß.

a) Wäre $U >$ Fläche $FBAF$; so erhielte man nach Satz 23 und 11:

Sector $FAQF : (FAv + EAu + \ldots + CAs) <$
$AF^2 : (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2)$ oder:

Sector $FAQF : (FAv + \ldots + CAs) < FQAF : U$,

also $FAv + EAu + \ldots + CAs =$ Sp. $FABF > U$,

was gegen die Annahme ist.

b) Wäre $U <$ Fläche $FBAF$, so erhielte man nach Satz 23 und 11:

Sect. $FAQF : (eAE + dAD + \ldots + bAB) >$

Sect. $FAQF : U$,

also:

$(eAE + dAD + \ldots + bAB) =$ Sect. $FABF < U$,

was ebenfalls gegen die Annahme ist; es muß also

$U =$ Sect. $FABF$ sein.

27) Der dritte Spiralring ist das Doppelte, der vierte das Dreifache, der fünfte das Vierfache ꝛc. des zweiten; die erste Spiralfläche ist der sechste Theil des folgenden Ringes.

In Fig. 10 sei Fläche $AB_1CA = a$, erste Spiralfläche; erster Spiralring $= b = ACB_1D_1CE$; der zweite Spiralring $= c = CED_1F_1EG$; der dritte Spiralring $= d = GEF_1H_1IG$; der vierte $= e \ldots$

Nach Satz 25 erhält man:

$(a + b)$: zweiter Kreisfläche $= 7 : 12$,

zweite Kreisfläche : erster Kreisfläche $= 12 : 3$,

erste Kreisfläche : $a = 3 : 1$, daher durch Multiplication:

$(a + b) : a = 7 : 1$ oder

$$b : 6 = a : 1 \text{ und } a = \frac{b}{6}.$$

Nach demselben Satze 25 erhält man:

$(a + b + c)$: dritter Kreisfl. $= (AG.AE + \frac{1}{3}EG^2) : AG^2$,

dritte Kreisfl. : zweiter Kreisfl. $= AG^2 : AE^2$,

zweite Kreisfl. : $(a + b) = AE^2 : (AE.AC + \frac{1}{3}CE^2)$,

also:

$$(a+b+c) : (a+b) = (AG.AE + \tfrac{1}{3}EG^2) : (AE.AC + CE^2)$$

oder:

$$(a+b+c) : (a+b) = 19\,EG^2 : 7EG^2 = 19 : 7;$$

daraus erhält man:

$$c : 12 = (a + b) : 7, \text{ oder}$$

$(a+b) : c = 7 : 12$, ferner ist:

$b : (a + b) = 6 : 7$,

und $b : c = 1 : 2$

also $c = 2.b.$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $d = 3b$, $e = 4b$ u. s. f.

28) Zieht man an eine Spiralwindung zwei Vectoren, beschreibt damit Kreislinien und macht den kleineren Vector dem größeren gleich, so erhält man dadurch den Abschnitt eines Kreisringes, der durch den Spiralbogen so getheilt ist, daß sich der äußere Theil zum inneren verhält, wie die Summe aus dem kleineren Vector und zwei Dritttheilen des größeren zur Summe aus den kleineren und einem Dritttheil des größeren.

In Fig. 5 sei Fläche $QBF = p$; Fläche $BFT = q$ und Sector $BAT = n$.

Nach Satz 26 ist nun:

$(n+p+q) : (n+q) = AF^2 : (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2)$; daraus:

$p : (n+q) = (AF.BQ - \frac{1}{3}BQ^2) : (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2)$;

ferner erhält man aus:

$(n + q) : (n + p + q) = (AF.AB + \frac{1}{3} BQ^2) : AF^2$ und $(n+p+q) : n = AF^2 : AB^2$; die Proportion: $(n + q) : n = (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2) : AB^2$ und daraus $q : (n + q) = (AB.BQ + \frac{1}{3}BQ^2) : (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2)$,

nach früherem ist:

$(n+q) : p = (AF.AB + \frac{1}{3}BQ^2) : (AF.BQ - \frac{1}{3}BQ^2)$,

also:

$q : p = (AB.BQ + \frac{1}{3}BQ^3) : (AF.BQ - \frac{1}{3}BQ^2)$ oder

$q : p = (AB + \frac{1}{3}BQ) : (AB + \frac{2}{3}BQ)$.

II. Sätze des Papus.

Gegen Ende des vierten Jahrhunderts p. a. Ch. sammelte [1]) Pappus in seinen μαθηματικαί συναγωγαί (collectiones mathematicæ) die Entdeckungen früherer Mathematiker. Im vierten Buche dieses Werkes finden sich die Sätze über die Archimedische ἕλιξ, welches Wort Commandinus in der Uebersetzung dieses Werkes wiedergibt mit «helica seu linea spiralis.»

Pappus läßt die Spirale auf dieselbe Weise entstehen wie Archimedes, nur mit dem Unterschiede, daß er den beweglichen Punkt, statt wie Archimedes in einer unbegrenzten geraden, in dem Radius einer Kreislinie annimmt.

Der erste Satz über diese Curve ist bei Pappus im genannten Buche Theor. XIX. (Bei Arch. Satz 14).

Das XX. Theorem (Satz 12 bei Archimedes) beweist Pappus auf folgende Art: Nach dem vorhergehenden Theorem (oder 14 bei Archimedes) erhält man (Fig. 5):

GNHG : LNHG = AG : AF daraus

Bogen GL : FL = GNHG : AG oder

GNHG : Bogen GL = AG : FL und ebenso:

Bogen GO : GNHG = Le : AG, aus beiden Proportionen:

Bog. GO : Bogen GL = Le : FL nun ist aber, weil $\alpha = \beta$,

GO = 2GL, also: 2 : 1 = Le : FL oder

Le = 2 FL und deßhalb auch Fe = Gf.

---

[1]) Pappi alex. math. coll. a Fred. Commandino etc. Pisauri 1588.

Der Beweis des **XXI. Theoremes** (bei Archimedes Satz 24) ist folgender:

Wenn das Verhältniß (Fig. 5) **GNHG : Bogen GL** gegeben ist, so läßt sich ein ihm gleiches aus geraden Linien gebildetes annehmen, dieses sei (Fig. 4) **KP : KR**; es sei ferner **KR = RQ = ..**; **KN # RT # QV # .. PL**; **KM # XZ # ....** Man erhält also:

$$GNHG : \text{Bogen } GL = KP : KR,$$

ferner ist:

$$PK : KR = KL : KZ = TR : RZ,$$ dann auch (Figg. 4 und 5) $AL : FL = TR : RZ$ und daraus

$$AL : AF = TR : TZ \text{ und}$$

$$AL^2 : AF^2 = TR^2 : TZ^2 = \text{Sect. } GAL : \text{Sect. } fAF.$$

daher auch:

$$\text{Sect. } GAL : \text{Sect. } fAF = \pi . TR^2 NT : \pi TZ^2 . NT.$$

ebenso:

$$\text{Sect. } LAO : \text{Sect. } eAE = \pi . QV^2 . TV : \pi VO^2 . TV.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

daraus:

$$(\text{Sect. } GAL + \text{Sect. } LAO + \ldots) : (\text{Sect. } fAF + \text{Sect. } eAE + \ldots) = (\pi . TR^2 NT + \pi QV^2 . TV + \ldots) : (\pi . TZ^2 . NT + \pi VO^2 . TV + \ldots)$$

Nun ist aber:

$\text{Sect. } GAL + \text{Sect. } LAO + \ldots =$ Kreisfläche **GNHG**,

$\pi TR^2 NT + \pi QV^2 . TV + \ldots =$ einem Cylinder $= \pi NK^2 . NL$

und nimmt man die Bogen: **GL**, **LO**,.. und die geraden **KR**, **RQ**... unendlich klein an, so ist

Sect. f**AF** + Sect. e**AE** + ... = erster Spiralfläche und

$$\pi TZ^2 . NT + \pi VO^2 . TV + .. = \text{einem Conus} = \frac{\pi NK^2 NL}{3},$$

also: erste Kreisfläche: erster Spiralfläche = 1 : $\frac{1}{3}$ und erste Spiralfläche = $\frac{1}{3}$ erster Kreisfläche.

Am Schlusse dieses Beweises ist noch bemerkt, daß der Theil der ersten Spiralfläche, welcher durch irgend einen Vector abgeschnitten wird und zwischen dem Anfangspunkte und diesem Vector liegt, dem dritten Theile des Kreissectors gleich ist, dessen Bogen mit dem Vector beschrieben ist und der zwischen der Anfangslinie und dem Vector liegt in der Richtung des zugehörigen Spiralbogens.

Dieses ist nur ein specieller Fall von Satz 26 bei Archimedes. Nach diesem Satze erhält man (Fig. 9)

Splfl. **EBAE** : Sect. **AELKA** = (**AE**.o + $\frac{1}{3}$ **AE**^{2}) : **AE**^{2} oder Spiralfl. **EBAE** : Sect. **AELKA** = $\frac{1}{3}$: 1 = 1 : 3 also: Spiralfl. **EBAE** = $\frac{1}{3}$ Sect. **AELKA**.

29) Wird in die erste Spiralfläche ein Vector gezogen, so verhalten sich die ganze erste Spiralfläche und das zwischen dem Anfangspunkte und dem gezogenen Vector liegende Stück zu einander wie die Cuben ihrer größten Vectoren.

Dieses **XXII**. Theorem, ebenso die Art des Beweises, scheint von Pappus selbst aufgestellt zu sein.

Zu beweisen ist, daß (Fig. 5):

Fläche **GBAG** : Fläche **FBAF** $= AG^3 : AF^3$.

es ist Fläche **GNHG** : Fläche **FnQhF** $= AG^2 : AF^2$ oder

Fläche **GNHG** : $\frac{AF}{2} . 2\pi AF = AG^2 : AF^2$, nach Satz 12

ist Bogen **GNHG** : Bogen **Fnhf** $= AG : AF$ oder

$2\pi AF$: Bogen **Fnhf** $= AG : AF$ und

Fläche **GNHG** : $\frac{AF}{2}$. Bog. **Fnhf** $= AG^3 : AF^3$ oder

Fläche **GNHG** : Fläche **Fnhf** $= AG^3 : AF^3$, da sich aber auch Fläche **GBAG** : Fläche **FBAF** $= \frac{1}{3}$ Fläche **GNHG** : $\frac{1}{3}$ Fläche **Fnhf**, (nach **XXI** des Pappus),

so erhält man auch:

Fläche **GBAG** : Fläche **FBAF** $= AG^3 : AF^3$.

30) Verlängert man die erste gerade in die erste Spiralfläche, errichtet aus dem Anfangspunkte dazu eine Senkrechte und verlängert sie ebenfalls in die Spiralfläche, so wird diese in vier Theile getheilt, die sich verhalten wie 1 : 7 : 19 : 37.

Der kleinste dieser Theile **AxkA** (Fig. 5) sei $= 1 = S_1$; der zweite **AkpA** $= S_2$; der dritte **ApCA** $= S_3$ und der vierte **ACGA** $= S_4$; dann ist (nach 29):

$(S_2 + S_1) : S_1 = Ap^3 : Ak^3$ oder

$S_2 : (Ap^3 - Ak^3) = S_1 : Ak^3$ und

$$S_2 = S_1 \frac{(Ap^3 - Ak^3)}{Ak^3} = S_1 (8 - 1) = 7 S_1 = 7$$

in gleicher Weise erhält man: $S_3 = 19$ und $S_4 = 37$.

30a) Ein gegebener Winkel oder Kreisbogen soll in einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden. (Prop. **XXXV**).

Wenn z. B. der Bogen **GHRNL** in dem Verhältniß **FT** : **AT** getheilt werden soll (Fig. 5), so betrachtet man den Bogen als einen Theil der ersten Kreislinie, deren Radius **AG** die erste Gerade ist, beschreibt dazu die erste Windung einer Archimedischen Spirale von **A** aus; wird nun mit **AT** ein Kreisbogen beschrieben, welcher die Spirale schneidet (**B**), so gibt die gerade Linie, welche von **A** aus durch diesen Punkt gezogen wird, den Theilungspunkt im ursprünglichen Bogen an.

Denn Bogen **GHRNL** : Bog. **GHR** = **AF** : **AT**,
daher Bogen **RNL** : **FT** = Bog. **GHR** : **AT** oder
Bogen **RNL** : Bog. **GHR** = **FT** : **AT**.

III. Sätze von Wallis.

In der Abhandlung: «**Arithmetica infinitorum sive nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturarum, aliaque difficiliora Matheseos Problemata. Anno 1655 typis edita**», finden sich einzelne Sätze über diese Spirale. Wallis versteht aber unter Spirallinie (**lin. spiralis**) nicht die Curve selbst, sondern, wie er in der **V. Propositio**

der genannten Abhandlung angibt, die Bogen von einer unendlichen Anzahl ähnlicher und stetig auf einander folgender Kreissectoren, welche der Spirale eingeschrieben sind; die Curve, welche dieser Spirale anliegt, also die eigentliche Spirallinie, nennt er **l. spuria.**

31) Der Spiralbogen in der ersten Windung, vom Anfangspunkte an gerechnet, verhält sich zum Kreisbogen, welcher mit dem größten Vector beschrieben ist und zu dem gleichen Winkel gehört, wie 1 zu 2. (**Prop. V.**)

Es sei (Fig. 11) $\angle P_1MT = \angle TMT_1 = \ldots$, dann ist der Bogen des ersten inneren Spiralsectors $= 0$, der des zweiten $= Tt = 1$; der des dritten $T_1t_1 = 2 \ldots$ und der des letzten sei $= T_nt_n = n$. Ist nun n unendlich groß, der Winkel P_1MT unendlich klein, so bildet die Summe der Bogen Tt die Spirallinie (**Sp.**). Der zugehörige Kreisbogen (**PT**), welcher mit dem größten Vector von der Anfangslinie an bis zur Spirallinie in ihrer Richtung beschrieben ist, besteht aus $(n + 1)$ gleichen Kreisbogen, wovon ein jeder dem Bogen des letzten inneren Sectors gleich gesetzt werden kann, also erhält man:

$$Sp = o + 1 + 2 + 3 + \ldots n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$PT = (n+1)\,n$$

und $\dfrac{Sp}{PT} = \dfrac{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n+1).\,n}$, daher

$$Sp : PT = 1 : 2.$$

Daraus folgt:

a) Die Spirallinie der ersten Windung verhält sich zur ersten Kreislinie wie 1 : 2. (**Prop. VI**).

b) Die Spirallinie der zwei ersten Windungen ist gleich der zweiten Kreislinie; die der drei ersten Windungen gleich der Hälfte von der dreifachen dritten Kreislinie u. s. f. (**Prop. VII**.)

c) Die Spirallinie, welche vom Anfangspunkte ausgeht, und die erste Windung überschreitet, aber nicht bis zum Endpunkte der zweiten reicht, ist gleich der Hälfte der Summe aus der mit dem größten Vector beschriebenen Kreislinie und dem Bogen derselben, welcher zwischen der Anfangslinie und dem Vector in der Richtung der Spirallinie liegt. (**Prop. VIII**).

d) Die Spirallinie, welche vom Anfangspunkte ausgeht und die zweite, dritte, vierte ꝛc. Windung überschreitet, ohne den Endpunkt der folgenden zu erreichen, ist gleich der halben Summe aus der mit dem größten Vector beschriebenen Kreislinie, diese multiplicirt mit der Zahl der ganzen Windungen und dem Bogen dieser Kreislinie, welcher zwischen der Anfangslinie und dem Vector in der Richtung der Spirallinie liegt. (**Prop. IX**).

32. Die Spirallinien der ersten, der zwei ersten, drei ersten Windungen u. s. w. verhalten sich wie die Zahlen: 1 : 4 : 9 : . . . . (**Prop. X**.)

Denn nach der Definition der Arch. Spirale ist (Fig. 10) $AC = CE = EG = GI = \ldots$, also verhalten sich

$$AC : AE : AG : AI = 1 : 2 : 3 : 4 : \ldots \text{ also}$$

auch $\frac{1AC}{2} : \frac{2AE}{2} : \frac{3AG}{2} : \frac{4AI}{2} = 1 : 4 : 9 : 16 : \ldots$ oder (nach 31)

$$S_1 : (S_1 + S_2) : (S_1 + S_2 + S_3) : \ldots = 1 : 4 : 9 : 16 \ldots$$

wenn S_1 erste, S_2 . . . zweite Spiralwindung bedeutet.

a) Ueberhaupt verhalten sich zwei Spiralbogen, welche vom Anfangspunkte ausgehen und in derselben oder in verschiedenen aber ähnlichen Spirallinien liegen, wie die Quadrate ihrer größten Vectoren. (**Prop. XI.**)

b) Spirallinien sind einander ähnlich, wenn gleichen Winkeln gleiche Vectoren entsprechen.

c) Zwei nicht ähnliche Spiralbogen, die vom Anfangspunkte ausgehen und deren größte Vectoren gleich sind, verhalten sich indirect wie zwei homologe Vectoren. (**Prop. XII.**)

d) Das Verhältniß zweier nicht ähnlichen Spiralbogen, die vom Anfangspunkte ausgehen, deren größte Vectoren aber verschieden sind, ist gleich dem Verhältniß aus den Quadraten ihrer größten Vectoren multiplicirt mit dem reciproken Verhältnisse zweier homologer Vectoren. (**Prop. XIII.**)

e) Zwei Spiralbogen, welche vom Anfangspunkte aus-

gehen, verhalten sich zu ihren größten Vectoren, wie die entsprechenden Abscissen einer Parabel zu ihren Ordinaten. (**Prop. XIV.**)

f) Wird eine Arch. Spirale aufgerollt zu einer geraden Linie, so daß die Vectoren unter sich parallel werden, so wird die Spirale zu einem Diameter und die Vectoren zu Ordinaten einer Parabel; rollt man dagegen einen Diameter einer Parabel so auf, daß die Endpunkte der Ordinaten in einem Punkte zusammentreffen, so wird die Axe zur Spirale, die Ordinaten zu Vectoren und ihr gemeinschaftlicher Punkt wird Anfangspunkt. (**Prop. XV.**)

g) Wird eine Parabel zur Spirale gerollt, so wird dadurch ihr Flächeninhalt auf die Hälfte reducirt. (**Prop. XVI.**)

Denn zerlegt man die Parabelfläche in unendliche schmale Rechtecke, so wird beim Zusammenrollen ein jedes derselben zu einem Dreiecke.

Zu diesem Satze bemerkt Wallis « — **sic ex aliis Paraboloeidibus (aliisve Trilineis istiusmodi) simili convolutione fieri posse alia Spiralium genera mille modis variata.** »

h) Die aufeinander folgenden Windungen von der ersten an, verhalten sich wie 1 : 3 : 5 . . . . (**Prop. XVII.**)

i) Werden von der Anfangslinie an Vectoren unter denselben Winkeln gezogen, so wird dadurch die Spiral-

linie so getheilt, daß sich ihre aufeinander folgenden Stücke verhalten wie 1 : 3 : 5 : . . . . (**Prop. XVIII.**)

Auf diese Sätze macht Wallis die Bemerkung: «**Tota hæc de longitudine lineæ Spiralis doctrina, continuis quatuordecim propositionibus jam tradita, est, apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus, penitus omissa: Nescio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.**»

Der nun folgende Satz über die Spirale (**Prop. XXIV**) ist ein specieller Fall des Satzes 26 bei Archimedes. Es ist nämlich behauptet, daß ein Theil der ersten Spiralfläche, welcher vom Anfangspunkte beginnt, gleich ist dem dritten Theile des Kreissectors, für denselben Centriwinkel und dessen Radius der größte Vector ist.

Wallis nimmt nun an, gemäß seiner Definition von Spirale, daß die Spiralfläche aus inneren unendlich kleinen und unter sich ähnlichen Kreissectoren bestehe; da sich aber diese zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Radien und die aufeinanderfolgenden Radien eine arithmetische Reihe bilden, so ist die Spiralfläche: (Sp)

$$Sp = o + 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2.$$

Durch Verlängerung der Vectoren wird auch der Kreissector in $(n + 1)$ unendlich kleine unter sich congruente Sectoren zerlegt, von denen jeder $= n^2$ gesetzt werden kann.

Darnach ist der Kreissector $= (n + 1) n^2$, also

$$\frac{\text{Sp.}}{\text{Sect.}} = \frac{o + 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2}{(n + 1) n^2} = \frac{\frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)}{(n + 1) n^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\text{Sp.}}{\text{Sect.}} = \frac{2n + 1}{6n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Je kleiner aber die einzelnen Kreissectoren der Spiralfläche angenommen werden, desto größer wird n, so daß der Werth $\frac{1}{6n}$ gleich o gesetzt werden kann; dann ist:

$$\text{Sp.} : \text{Sect.} = 1 : 3.$$

Der nächstfolgende Satz (**Prop. XXV.**) des Wallis ist der Satz 24 des Arch.

33) Die Summe von aufeinander folgenden ganzen Spiralflächen einschließlich der ersten ist gleich dem Produkte aus der Windungszahl und dem dritten Theile der größten Kreisfläche. (**Prop. XXVI.**) Wallis beweist diesen Satz wie die **Prop. XXIV.** Folgt auch aus Satz 26 und 27.

In den **Propp. XXVII** und **XXVIII** ist der eben genannte Satz auch ausgedehnt auf eine Summe von aufeinander folgenden Flächen einschließlich der ersten Windung, wovon die letzte unvollendet ist. Die ganze Fläche ist gleich dem dritten Theile der größten Kreisfläche multiplicirt mit der Zahl ganzer Windungen und dem dritten Theile des Sectors dieses Kreises, welcher von der Anfangslinie beginnt und in der Richtung der Spirale sich bis zum größten Vector erstreckt.

34) Die Flächen zweier Windungen, die beide vom Anfangspunkte ausgehen, verhalten sich wie die Cuben ihrer größten Vectoren. (**Propp. XXIX** und **XXX**). cf. Satz 29.

Die Windungszahl der ersteren Fläche S_1 sei $\frac{a}{b}$ und ihr größter Vector r; die Windungszahl der anderen Fläche S_2 sei $\frac{c}{d}$ und ihr größter Vector ϱ; es ist dann:

$$S_1 : S_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi r^2}{3} : \frac{c}{d} \cdot \frac{\pi \varrho^2}{3} = \frac{a}{b} \cdot r^2 : \frac{c}{d} \cdot \varrho^2,$$

da aber die Vectoren den Windungszahlen proportional sind, so ist auch: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = r : \varrho$, also:

$$S_1 : S_2 = r^3 : \varrho^3.$$

35) Zwei unähnliche Spiralflächen, die vom Anfangspunkte ausgehen und gleiche größte Vectoren haben, verhalten sich indirect, wie zwei homologe Vectoren. (**Prop. XXXI.**)

Sind die Flächen der ersten Spirale vom Anfangspunkte an bis zu den Vectoren a und r : Sa und Sr; ebenso in einer anderen, der ersten unähnlichen Spirale, seien die Flächen vom Anfangspunkte bis zu den Vectoren b und r : σb und σr; ferner sei a homolog zu b und beider Windungszahlen $\frac{m}{n}$; so erhält man (nach 34):

$$Sr : Sa = r^3 : a^3$$

$$\sigma r : \sigma a = r^3 : b^5$$

und $\frac{Sr}{\sigma r} : \frac{Sa}{\sigma r} = b^3 : a^3$, da aber

$$\frac{Sa}{\sigma a} = \frac{\frac{1}{3}\frac{m}{n} \cdot a^2\pi}{\frac{1}{3}\frac{m}{n} \cdot b^2\pi} = \frac{a^2}{b^2},$$ so ist:

$$\frac{Sr}{\sigma r} : \frac{a^2}{b^2} = b^3 : a^3$$ oder:

$$Sr : \sigma r = b : a.$$

36) Das Verhältniß zweier unähnlicher Spiralflächen, die vom Anfangspunkte ausgehen und ungleiche größte Vectoren haben, ist gleich dem Producte aus dem Verhältniß der Cuben ihrer größten Vectoren und dem indirecten Verhältnisse zweier homologer Vectoren. (**Prop. XXXII.**)

Ist der größte Vector der ersten Fläche r und der größte der unähnlichen ϱ, das übrige wie in Satz 35, so ist

$$Sr : Sa = r^3 : a^3$$

$$\sigma\varrho : \sigma b = \varrho^3 : b^3$$

$$\frac{Sr}{\sigma\varrho} : \frac{Sa}{\sigma b} = \frac{r^3}{\varrho^3} : \frac{a^3}{b^3},$$ da aber $\frac{Sa}{\sigma b} = \frac{a^2}{b^2}$, so ist

$$\frac{Sr}{\sigma\varrho} : \frac{a^2}{b^2} = \frac{r^3}{\varrho^3} : \frac{a^3}{b^3}$$ oder:

$$\frac{Sr}{\sigma\varrho} = \frac{r^3 . b}{\varrho^3 . a}.$$

37) Die erste Spiralfläche und die Flächen der auf einander folgenden Windungen verhalten sich zu einander wie die Zahlen: 1 : 7 : 19 : 37 : 61 : . . . . (**Prop. XXXIII.**)

Folgt aus Satz 34.

38) Bilden aufeinanderfolgende Vectoren von der Anfangslinie an unter sich gleiche Winkel, so verhalten sich die zwischen je zwei aufeinander folgenden Vectoren liegenden Spiralsectoren wie die Zahlen 1 : 7 : 19 : 37 : . . . . (**Prop. XXXIV**.)

Folgt aus Satz 34.

39) Die erste Spiralfläche und die darauf folgenden Ringe ganzer Windungen verhalten sich wie die Zahlen: 1 : 6 : 12 : 18 : . . . (**Prop. XXXV**.)

Folgt aus Satz 37; ist der Satz 27 bei Archimedes.

40) Die Ergänzungsfläche eines Spiralsectors in der ersten Windung, welcher vom Anfangspunkte beginnt, zum Kreissector, verhält sich zu diesem Sector wie 2:3. (**Prop. XXXVI.**) Ebenso verhält sich auch die Ergänzungsfläche der ganzen ersten Windung zur ersten Kreisfläche. (**Prop. XXXVII.**)

Folgt aus Satz 26.

41) Die Ergänzungsflächen der aufeinander folgenden ganzen Windungen zu den zugehörigen Kreisflächen, verhalten sich wie: 2 : 5 : 8 : 11 . . . (**Prop. XXXVIII.**)

Denn ist die erste Kreisfläche c, so sind die aufeinander folgenden Spiralwindungen $\frac{c}{3}, \frac{7c}{3}, \frac{19c}{3} \ldots,$
die auf einander folgenden Kreisflächen: c, 4c, 9c, . . .,
also die Ergänzungsflächen: $c - \frac{c}{3}$; $4c - \frac{7c}{3}$; $9c - \frac{19c}{3}$;
und daraus die Verhältnisse: 2 : 5 : 8 : . . .

In einem Scholium zu dieser **Prop.** gibt Wallis noch eine andere Methode an wie man eine gerade Linie, welche der eigentlichen Spirallinie ihrer Größe nach möglichst gleich komme, finden kann.

Zu diesem Zwecke zerlegt er die Spiralfläche in Sectoren mit sehr kleinen aber gleichen Winkeln am Anfangspunkte; dann ist (Fig. 11)

$$Tn = \sin. TMn,\ nt = \sin. \text{vers}. TMn = v;\ T_1t = a = T_2t_1 = T_3t_2 = \ldots.$$

Ist nun der Winkel TMT_1 so klein, daß TT_1 als eine gerade Linie angenommen werden kann, so erhält man aus dem Dreiecke TMT_1: $TT_1 = \sqrt{\sin^2 TMn + (a+v)^2}$; ist ferner d der Durchmesser zum Kreisbogen Tt, so ist $Tn^2 = v.(d - v) = \text{Sin}^2\, TMn$, dieses in die vorhergehende Gleichung eingeführt gibt:

$$TT_1 = \sqrt{vd - v^2 + a^2 + 2av^2} \text{ oder}$$

$$TT_1 = \sqrt{a^2 + 2av + vd}.$$

Die Werthe von v und d sind in den aufeinander folgenden Sectoren proportional; ist nun $v = \frac{d}{m}$, od. $d = vm$, so ist: $TT_1 = \sqrt{a^2 + 2av + mv^2}$.

In dieser Gleichung ist nur v veränderlich und hat, um die aufeinander folgenden Theile der Spirallinie zu erhalten, dafür die entsprechenden Werthe einzuführen. Die Summe aus allen diesen Theilen ist der gesuchten Geraden gleich.

Auf dieses Scholium ist in «εὔθυσις et πλατυσμός Curvarum» wieder Bezug genommen (Tom. I. p. 559). Ist nämlich sin. TMn = s, so erhält man:

$$TT_1 = \sqrt{s^2 + a^2 + 2av + v^2},$$

da aber $s^2 + v^2 = Tt^2$ (Fig. 11), so ist, wenn $Tt = c$ gesetzt wird: $TT^1 = \sqrt{a^2 + 2av + c^2}$.

Werden nun die Winkel TMT unendlich klein, so wird $v = o$ und $TT_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$.

Daraus wird nun geschlossen:

«Adeoque particulæ Spiralis, non minus quam Parabolæ, erunt, ut quadratorum æqualium quadratis Arithmetice-proportionalium auctorum, latera. Unde linearum Spiralis et Parabolicæ æqualitatem manifestam esse constat.»

«Quæ quidem inventio, num Hobbio, an Robervallio, debeatur, (uterque enim vendicat) non determino.»

In dem Scholium zu Prop. XLV (Arithm. inf.) ist angegeben, daß sich eine Menge verschiedener Arten von Spiralen unterscheiden lasse, je nach dem Verhältnisse, in welchem die aufeinander folgenden Vectoren zunehmen; und dieses nicht blos bei ebenen Spiralen, sondern auch bei solchen, die in der Oberfläche gewisser Körper liegen [1].

---

[1]) Ebenso T. II. p. 660.

42) Soll eine Tangente an eine Windung dieser Spirale gelegt werden, so zieht man den Vector auf diesen Punkt der Spirale, errichtet auf seinem Endpunkt eine Senkrechte, welche so lang ist als der dem Vector entsprechende Kreisbogen; construirt man mit dem Vector und dieser Senkrechten ein Rechteck, so ist die Diagonale die verlangte Tangente.

Wallis theilte dem Oldenburg brieflich zwei verschiedene Methoden mit, an Curven Tangenten zu legen. (**Philos. Trans.** Monat März 1672; **Opera Math. T. II. p.** 398).

Nach der einen Methode erhalte man die Tangenten durch Rechnung (**in Speciebus**), nach der anderen durch Construction (**in Lineis**). Diese letztere Methode beruhe auf der Bewegung des entsprechenden Punktes einer Curve; bei der Spirale des Arch. habe dieser Punkt eine doppelte Bewegung: eine geradlinige im Vector und eine kreisförmige; die Bewegungsrichtung müsse also angegeben sein durch die Diagonale des Parallelogrammes aus den einzelnen Bahnen; und da die Kreisbewegung rechtwinklig zur geradlinigen sei, so müsse das Parallelogramm bei dieser Spirale ein Rechteck sein. Diese Art, die Länge einer Linie aus der Bewegung eines Punktes zu bestimmen möge auch Veranlassung gewesen sein bei Archimedes, den Kreis mittels der Spirale zu quadriren. (**T. II p.** 661).

In dem **Tractatus de motu** (**anno** 1670 **ed. Tom. I**) wird in **Prop. XXVII** manches schon genannte wiederholt

und außerdem noch der Schwerpunkt der Spiralbogen bestimmt; ähnliches findet sich auch in **Prop. XXVIII**, wo dazu noch eine andere Art, die Spirale zur Parabel zusammenzurollen, angegeben ist; diese Curve erhält nämlich eine solche Krümmung, daß die Abscissenaxe zu einem Punkte wird, der im Scheitel der Parabel liegt und Anfangspunkt der Spirale wird, die Ordinaten der Parabel werden dann zu Vectoren der Spirale.

IV. Bullialdus.

Im Jahre 1657 veröffentlichte Bullialdus eine Abhandlung unter dem Titel: **Ismaelis Bullialdi de lineis spiralibus demonstrationes novæ. Parisiis apud Seb. Cramoisy.** Die Vorrede beginnt mit dem vielfach citirten Satze: «**Archimedis de lineis spiralibus tractatum, cum bis terque legissem, totasque animi vires intendissem, ut subtilissimarum demonstrationum de spiralem tangentibus artificium adsequerer; nusquam tamen, ingenue fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin scrupulus animo semper hæreret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam.**» Daß das Verständniß der Archimedischen Schrift besondere Schwierigkeiten habe, bekräftigt er durch eine Ansicht von Vieta: «**Dubitat enim Vieta an circulari æqualem exhibuerit Archimedes; eo**

quod lineam rectam majorem ambitu cujuscunque polygoni circulo inscripti, minorem autem ambitu cujuscunque polygoni circumscripti descripserit; et tandem conclusit hisce verbis, si vere Archimedes, fallaciter conclusit Euclides.»

Bullialdus will nun das, was Archimedes indirect bewiesen hat, direct beweisen:

«Duplici methodo eaque directa id ipsum ostendimus, per inscripta scilicet polygona, itemque per figuras ex semidiametris tam circulo quam spirali existentibus, quadratas; atque etiam per repertam a B. Cavallerio, geometra insigni, appellatamque Indivisibilium methodum.»

Vorausgesetzt werden die Sätze: 1, 2, 12, 13, 14, 15 des Archimedes. Die ganze Abhandlung umfaßt 94 Sätze, von denen die Mehrzahl nur Hilfssätze sind, womit die Archimedischen Sätze direct bewiesen werden. Rücksichtlich dieser Beweise bemerkt Montucla mit Recht, daß sie verworren und schwerer sind als die des Archimedes.

B.

Die Archimedische Spirale nach der Aufstellung des Infinitesimalcalculs.

I. Gleichung.

Um die Gleichung der Spirale in einer allgemeineren Form zu erhalten, sei die Archimedische Definition etwas erweitert. Die Linie **AE** (Fig. 12) bewege sich von **BA** an gleichförmig um den Punkt **A**, mit **AE** sei die zu ihr parallele **CH** fest verbunden und auf dieser bewege sich der Punkt **C** von **H** an gleichförmig und proportional der Winkelbewegung von **AE**. Nach der Definition ist nun

$$AE : (2nr\pi + r\psi) = r : 2r\pi \text{ oder}$$

$$AE = \frac{r\,(2n\pi + \psi)}{2\pi},$$ wenn n die Windungszahl und der Bogen $\psi \leqq \pi$ ist.

Nun ist aber nicht **E** der bewegliche Punkt, sondern **C**, da aber **AH** $\perp$ **HC**, so ist $AE = \sqrt{AC^2 - AH^2}$, oder wenn $AC = v$, $AH = d$ gesetzt wird, so ist

$$\sqrt{v^2 - d^2} = \frac{r}{2\pi}\,(2n\pi + \psi), \text{ oder}$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(2\pi d)^2 + (2rn\pi + r\psi)^2},$$

$$v = \frac{r}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{2\pi d}{r}\right)^2 + (2n\pi + \psi)^2}.$$

Die Spirale dieser Gleichung wird das Centrum **A** erreichen, wenn $d = o$ wird, dann ist

$$v = \frac{r}{2\pi} (2n\pi + \psi), \text{ oder wenn } 2n\pi + \psi = \varphi:$$

$$v = \frac{r}{2\pi} . \varphi \;\ldots\; 1.$$

Für die erste Windung ist $n = o$, für die zweite $= 1$ u. s. f. ist $n = o$, so ist

$$v = \frac{r\psi}{2\pi}.$$

Würde die Bewegung des Punktes **C** nicht in **H**, sondern in **M** beginnen, so wär $C_1A = \sqrt{(C_1M + HM)^2 + HA^2}$, oder wenn $\angle MAH = \alpha$, so ist $HM = d tg\alpha$, da auch $C_1M = AE$, so ist

$$C_1A = v_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{r}{2\pi}(2n\pi + \psi) \pm d tg\alpha\right)^2 + d^2.\right]}$$

Von diesen Gleichungen wird der Einfachheit wegen im folgenden hauptsächlich nur von Gl. 1 Gebrauch gemacht werden.

Gleichungen der Spiralen und der Archimedischen besonders wurden schon von Jac. und Joh. Bernoulli, **M. de l'Hôpital**, **Fermat** und andern aufgestellt; eine Gleichung, welche unzählige Spiralen in sich schließt oder vielmehr eine Gleichung, mittels der man jede Curve in eine Spirale zu-

sammenrollen kann, rühmt sich [1]) Varignon, gefunden zu haben. Zu diesem Zwecke nimmt er einen Kreis an (Wälzungskreis, **cercle de révolution**) und legt durch sein Centrum die Abscissenaxe der Curve, welche zur Spirale zusammengerollt werden soll. Ist nun c der ganze Wälzungskreis, x ein beliebiger Bogen desselben vom Durchschnittspunkte der Abscissenaxe an gerechnet, b eine Ordinate der ursprünglichen Curve für den Durchschnittspunkt der Abscissenaxe und den Kreis und z irgend eine andere Ordinate derselben Curve, so bildet er die Proportion:

$$c : x = b : z \quad \text{und}$$

$$cz = b.x.$$

Wird $c = 2\pi r$, $x = 2n\pi r + r\psi$, $z = y$ gesetzt, so ist

$$2\pi r y = br\,(2n\pi + \psi)$$

$$y = \frac{b}{2\pi}(2n\pi + \psi) \;.\;.\;.\;.\; 2)$$

worin $\psi \overline{\gtrless} \pi$ ist. Soll nun eine Curve (ursprüngliche Curve) zur Spirale zusammengerollt werden, so hat man aus ihrer Gleichung den Werth von y in diese Gleichung einzuführen, wobei ψ ein Bogen des Wälzungskreises und x (Abscisse der ursprünglichen Curve) zum Vector wird.

---

[1]) Mém. de l'Acad. des sc. 1704 p. 69.

Clairaut läßt diese Spirale durch eine Kreisfläche entstehen, welche sich gleichförmig auf einer geraden Linie bewegt, und durch einen festen Punkt. (Hist. de l'Acad. roy. des sc. A. 1740 p. 148).

In ähnlicher Weise auch J. W. A. Pfaff. („Betrachtungen über die Spirale.")

Um eine Gleichung für rechtwinklige Coordinaten zu erhalten sei Tn (Fig. 11) senkrecht auf nM und Tn = y; nM = x; Winkel TMn = φ; dann ist $TM^2 = v^2 = x^2 + y^2$;

$$y = v . \sin\varphi;\ x = v . \cos\varphi.$$

Daraus erhält man durch Differentiation:

$$dy = v. \cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, dv \quad \text{und}$$

$$dx = - v. \sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, dv;$$

aus letzterer Gleichung ist:

$$dv = \frac{dx + v \sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi};$$

wird dieser Werth in die vorhergehende Gleichung eingeführt, so ist:

$$dy = v. \cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi \left(\frac{dx + v \sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi}\right), \text{ oder}$$

$$dy \cos\varphi - v \cos\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\, dx + v. \sin\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$

und $(dy - xd\varphi) \cos\varphi = (dx + y\, d\varphi) \sin\varphi$;

werden die Werthe für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ eingeführt, so ist

$$(dy - xd\varphi) \frac{x}{v} = (dx + yd\varphi) \frac{y}{v}, \text{ oder}$$

$$xdy - x^2 d\varphi = ydx + y^2 d\varphi \quad \text{und}$$

$$xdy - ydx = (y^2 + x^2)\, d\varphi, \text{ also}$$

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots \alpha.$$

Aus der Gleichung

$$v^2 = x^2 + y^2 \text{ erhält man:}$$

$$2vdv = 2xdx + 2ydy, \text{ oder}$$

$$dv = \frac{xdx + ydy}{v} \text{ und}$$

$$dv = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ldots\ldots \beta.$$

Die Polargleichung der Spirale ist aber:

$$v = \frac{r}{2\pi}(2n\pi + \varphi), \text{ daher}$$

$$dv = \frac{rd\varphi}{2\pi};$$ werden aus Gleichung α und β die Werthe in diese eingeführt, so ist

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r}{2\pi}\left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right), \text{ oder}$$

$$(xdx + ydy)\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{2\pi}(xdy - ydx)^{1)}.$$

Aus Gleichung 1 erhält man durch Differenzirung:

$$dv = \frac{rd\varphi}{2\pi} \ldots . 3, \text{ oder}$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{2\pi}{r} \ldots . 4$$

Die Vectoren dieser Spirale verhalten sich wie die zugehörigen Bogen der ersten Kreislinie.

Ist $\psi_1 < 2\pi$, $\psi_2 < 2\pi$; ferner m und n ganze Zahlen, so ist

$$v_1 = \frac{r}{2\pi}(2m\pi + \psi_1)$$

$$v_2 = \frac{r}{2\pi}(2n\pi + \psi_2), \text{ daher:}$$

---

[1]) Cf. Lacroix: Traité du Calc. diff. ect. Tom. I p. 476.

$$v_1 : v_2 = (2m\pi + \psi_1) : (2n\psi + \psi_2)$$

(Satz 14 und 15 des Arch.).

In der Archimedischen Spirale ist der Abstand unmittelbar auf einander folgender Windungen constant und dem Radius der ersten Kreislinie gleich.

Denn nach Gleichung 2 ist:

$$v_1 = \frac{r}{2\pi}(2n\pi + \psi),$$

und für den homologen Punkt der folgenden Windung:

$$v_2 = \frac{r}{2\pi}(2(n + 1)\pi + \psi),$$

wird die vorhergehende Gleichung von dieser abgezogen, so ist:

$$v_2 - v_1 = r.$$

II. Subtangente.

Die gerade Linie, welche vom Centrum der Spirale rechtwinklig zum Vector gezogen und bis zu der Tangente verlängert wird, welche diesem Vector entspricht, heißt Subtangente.

[1]) **Marquis de l'Hôpital** bestimmt die Subtangente unmittelbar auf folgende Art: Es sei (Fig. 13) **HK** eine beliebige Curve **DL**, = t eine Tangente derselben, **PM** ein Spiralbogen dessen Anfangspunkt **A**; **AD** und **AE** zwei

[1]) Analyse des infiniment petits; Paris 1781; ebenso auch Hausmann: (de lin. spiralibus. Leipzig 1790) und Varignon, XIV.

einander unendlich nahe liegende Vectoren; ferner sei **AD** $\perp$ **AL**; **DG** $\|$ **CB** $\|$ **AL**. Es verhält sich nun, da die Dreiecke **ALD** und **DGE** als ähnlich anzunehmen sind:

$$LD : AL = DE : DG; \text{ und}$$

$$DG = \frac{AL.DE}{LD}.$$

Wird der Bogen **HE** ein Kreisbogen mit dem Centrum **A**, so wird **LD** $=$ **AL** $= \infty$, **AD** $=$ r und **DE** $=$ r$d\varphi$, wenn Winkel **DAE** $= d\varphi$; nun ist **DG** $=$ r$d\varphi$. Da auch **DAG** $\sim$ **CAB**; so erhält man, **AC** $=$ v gesetzt:

$$v : r = CB : rd\varphi, \text{ oder}$$

$$CB = v.d\varphi.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **ACQ** und **BCM** folgt; **BM** $=$ dv gesetzt:

$$AQ : v = v.d\varphi : dv, \text{ oder}$$

$$AQ = \frac{v^2 d\varphi}{dv},$$ wird in diese Gleichung der Werth von $\frac{d\varphi}{dv}$ aus Gleichung 4 eingeführt, so ist:

$$AQ = v^2. \frac{2\pi}{r} = v. \frac{2\pi v}{r},$$

aus Gleichung 1 erhält man aber $\frac{2\pi v}{r} = \varphi$, also:

$$AQ = \text{Subtg.} = v.\varphi \ldots\ldots 5$$

in welcher Gleichung $\varphi = \infty$ werden kann. Wäre für $\frac{2\pi v}{r}$ ein Werth aus Gleichung $v = \frac{r}{2\pi}(2n\pi + \psi)$ bestimmt worden, so wäre **AQ** $= v.(2n\pi + \psi) \ldots 6)$ geworden.

Soll die Subtangente bestimmt werden ohne die Curve **HK**, so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **CBM** und **QAM** die Proportion:

$$BM : AM = CB : AQ; \text{ es ist aber}$$

$$BM = dv, \; AM = v + dv; \; CB = v \sin d\varphi;$$

wenn Winkel **CAB** $= d\varphi$ ist,

also $dv : (v + dv) = v. \sin d\varphi : AQ$, oder

$$AQ = \frac{(v + dv)\, v . \sin d\varphi}{dv};$$

da aber für $\sin d\varphi$ auch $d\varphi$ gesetzt werden kann, so ist

$$AQ = \frac{v^2 d\varphi + v dv . d\varphi}{dv}$$

und weil das zweite Glied des Zählers als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung gegen das erste Glied verschwindet,

so ist: $AQ = \frac{v^2 d\varphi}{dv}$,

woraus wie vorher $AQ = v.\varphi$ gefunden wird.

Die Gleichung: Subtg. $= \frac{v^2 d\varphi}{dv}$ ist zugleich die allgemeine Form der Subtangente einer jeden ebenen Curve für Polarcoordinaten.

Ist in der Gleichung: Subtg. $= v.\varphi$

$\varphi = o$	, so ist $v = o$	, also Subtg.	$= o$
$\varphi = 2\pi$	„ $v = r$	„ „	$= 2\pi r$
$\varphi = 4\pi$	„ $v = 2r$	„ „	$= 2^2.2\pi r$
$\varphi = 6\pi$	„ $v = 3r$	„ „	$= 3^2.2\pi r$
$\vdots = \vdots$	„ $\vdots$		
$\varphi = n(2\pi)$	„ $v = nr$	„ „	$= n^2.2\pi r.$

Es ist also:

Subtg. $(2\pi) = 2\pi r$, (Arch. Satz 18); und

Subtg. $(4\pi) = 4.2\pi r = 2.2\pi(2r)$, (Arch. Satz 19),

Subtg. $(\varphi) = r\varphi$, (Arch. Satz 20); $\varphi < 360^\circ$;

Subtg. $(2\pi + \varphi) = 2\pi r + r\varphi$, (Arch. S. 20, α);

Subtg. $(2(n-1)\pi + \varphi) = 2r\pi(n-1) + r\varphi$, (Arch. Satz 20, β).

III. Tangente.

Die Tangente ist die gerade Linie, welche die Spirale berührt und bis zur Subtangente reicht.

Ist die Subtangente bekannt, so erhält man für die Tangente (Fig. 13)

$$CQ^2 = AQ^2 + AC^2;$$

nun ist aber CQ = Tang., $AQ = v.\varphi$ = Subtg., $AC = v$, also

$$\text{Tg.} = \sqrt{v^2\varphi^2 + v^2}, \text{ oder}$$

$$\text{Tg.} = v\sqrt{\varphi^2 + 1}.$$

Unmittelbar erhält man die Tangente (Fig. 13):

$$CQ = v. \sec. ACQ,$$

$$CQ = v. \sqrt{1 + tg^2.ACQ},$$

da aber $tg\,ACQ = v. \frac{d\varphi}{dv}$ ist, so erhält man

$$CQ = v\sqrt{1 + \frac{v^2 d\varphi^2}{dv^2}} = \frac{v}{dv}\sqrt{dv^2 + v^2 d\varphi^2}, \text{ od. weil } d\varphi = \frac{2\pi dv}{r},$$

$$^{1}) \; CQ = v\sqrt{1+\left(\frac{v2\pi}{r}\right)^2} = v\sqrt{1+\varphi^2}.$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ geht:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);$$

werden nun in diese Gleichung die entsprechenden Werthe für das polare Coordinatensystem eingeführt, nämlich:

$$y = V \sin \Phi; \; y_1 = v_1 \sin \varphi_1; \; y_2 = v_2 \sin \varphi_2,$$

$x = V \cos \Phi; \; x_1 = v_1 \cos \varphi_1; \; x_2 = v_2 \cos \varphi_2$, so erhält man

$$V \sin \Phi - v_1 \sin \varphi_1 = \frac{v_1 \sin \varphi_1 - v_2 \sin \varphi_2}{v_1 \cos \varphi_1 - v_1 \cos \varphi_2}(V \cos \Phi - v_1 \cos \varphi_1),$$

wird daraus V bestimmt, so ist:

$$V = \frac{v_1 v_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{v_1 \sin(\varphi_1 - \Phi) - v_2 \sin(\varphi_2 - \Phi)},$$

In dieser Gleichung sind V und Φ die Polarcoordinaten der geraden Linie, welche durch die beiden Punkte $(v_1 \varphi_1)$ und $(v_2 \varphi_2)$ geht.

Rücken diese zwei Punkte $(v_1 \varphi_1)$ und $(v_2 \varphi_2)$ unendlich nahe zusammen, so werde $v_2 = v$; $v_1 = v + dv$; $\varphi_2 = \varphi$; $\varphi_1 = \varphi + d\varphi$; dann ist

$$V = \frac{v(v + dv)\sin d\varphi}{(v+dv)\sin((\varphi+d\varphi) - \Phi) - v.\sin(\varphi - \Phi)}, \text{ daraus ist}$$

$$V = \frac{v^2 \frac{\sin d\varphi}{d\varphi}}{\frac{dv}{d\varphi}\left(\sin(\varphi-\Phi)+v\cos(\varphi-\Phi)\frac{\sin d\varphi}{d\varphi}+\cos(\varphi-\Phi)\frac{\sin d\varphi}{d\varphi}.dv\right)}$$

---

[1]) Lacroix: Traite du calc. dif. ect. T. I, p. 476.

oder

$$V = \frac{v^2}{\frac{dv}{d\varphi}(\sin(\varphi - \Phi) + r\cos(\varphi - \Phi))}$$, werden für

$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)$ und v die entsprechenden Werthe aus der Gleichung der Spirale eingeführt, so ist

$$^{1)}V = \frac{r(2n\pi + \varphi)^2}{2\pi(\sin(\varphi - \Phi) + (2n\pi + \varphi)\cos(\varphi - \Phi))}$$

Diese Gleichung gibt den Abstand eines beliebigen Punktes jeder Tangente vom Centrum der Spirale.

Den Winkel, welchen die Tangente mit dem Vector bildet, erhält man mit der Subtangente, es ist nämlich, wenn $\sphericalangle$ ACQ $= \alpha$ (Fig. 13),

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{AQ}{AC}$$, da aber AQ $= v.\varphi$ und

AC $= v$, so ist Tang. $\alpha = \frac{v.\varphi}{v} = \varphi$.

Dasselbe erhält man auch unmittelbar; es sei (Fig. 14) EF ein Spiralbogen mit dem Anfangspunkte B; AE die Tangente, AB $=$ BD $= v$; AG $=$ GD; AC $\perp$ BE; $\sphericalangle$ AEB $= \alpha$; $\sphericalangle$ ADB $= \beta$, $\sphericalangle$ ABD $= \triangle\varphi$. Nun ist:

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{AC}{ED + CD} = \frac{AD.\sin\beta}{ED + AD\cos\beta}$$, oder weil

AD $= 2v.\sin\frac{\triangle\varphi}{2}$ ist:

---

[1]) Grunert: Polarcoordinaten p. 147.

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{2v.\sin\frac{\triangle\varphi}{2}.\sin\alpha}{ED + 2v.\sin\frac{\triangle\varphi}{2}.\cos\beta},$$

ferner ist $\beta = 90^0 - \frac{\triangle\varphi}{2}$, wird dieser Werth eingeführt und die entsprechenden Punctionen entwickelt, so ist

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{2v.\sin\frac{\triangle\varphi}{2}.\cos\frac{\triangle\varphi}{2}}{ED + 2v.\sin^2\frac{\triangle\varphi}{2}}.$$

Rücken die zwei Vectoren **BA** und **BE** unendlich nahe zusammen, so wird $ED = dv$ und $\triangle\varphi = d\varphi$, $\cos\frac{\triangle\varphi}{2} = 1$, $\sin\frac{\triangle\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$, und

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{2.\ v.\ \frac{d\varphi}{2}}{dv + 2v.\left(\frac{d\varphi}{2}\right)^2}$$

oder da $\left(\frac{d\varphi}{2}\right)^2$ als eine unendliche kleine Größe zweiter Ordnung gegen die übrigen verschwindend klein wird:

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{v.\,d\varphi}{dv}$$ und für $\frac{d\varphi}{dv}$ den Werth eingeführt:

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{v.\,2\pi}{r} = \varphi.$$

Ist $\varphi = o$, so ist $\alpha = 0$

„ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, „ $\alpha = 57^0\ 31'\ 6''$

„ $\varphi = \pi$, „ $\alpha = 72^0\ 20'\ 35'',5$

„ $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, „ $\alpha = 78^0\ 1'\ 9''$

Ist $\varphi = 2\pi$, so ist $\alpha = 80^\circ\ 57'\ 25''$

" $\varphi = \frac{5\pi}{2}$, " $\alpha = 82^\circ\ 44'\ 38'',1$

" $\varphi = 3\pi$, " $\alpha = 83^\circ\ 56'\ 36''$

" $\varphi = \frac{7\pi}{2}$, " $\alpha = 84^\circ\ 48'\ 13''$

" $\varphi = 4\pi$, " $\alpha = 85^\circ\ 27'\ 0'',4$

" $\varphi = \frac{9\pi}{2}$, " $\alpha = 85^\circ\ 57'\ 27''$.

" $\vdots$ $\vdots$

" $\varphi = \infty$, " $\alpha = 90^\circ$

Der Winkel, welchen der Vector mit der Tangente bildet, ist also nicht constant, sondern wächst von 0° und nähert sich nach unendlich vielen Windungen der Grenze 90°; er ist daher für eine endliche Anzahl von Windungen kleiner als 90°. (Arch. Satz 16 und 17).

Die Gleichung für den geometrischen Ort des Durchschnittspunktes der Tangente und Subtangente erhält man mittels der Subtangente; ist nämlich der Winkel, welchen diese Linie mit der ersten geraden oder der Axe der Spirale bildet β, so muß $\beta = \varphi \mp \frac{\pi}{2}$ sein, oder $\varphi = \beta \pm \frac{\pi}{2}$; aus der Gleichung: Subtg. $= s = v\varphi$, $s = \frac{r}{2\pi}\varphi^2$ erhält man:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\pi s}{r}},$$

also $\sqrt{\frac{2\pi s}{r}} = \beta \pm \frac{\pi}{2}$, oder $s = \frac{r}{2\pi}\left(\beta \pm \frac{\pi}{2}\right)^2$.

Die aufeinander folgenden Subtangenten, oder da diese Linien als Vectoren einer anderen Curve anzusehen sind, diese aufeinander folgenden Vectoren verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Kreisbogen; der Ort des Durchschnittspunktes der Tangente und Subtangente ist also selbst eine Spirale und zwar eine parabolische.

IV. Subnormale.

Errichtet man auf dem Berührungspunkte der Tangente eine Senkrechte und verlängert diese und die Subtangente bis sie sich schneiden, so heißt der Theil dieser Verlängerungslinie, welcher zwischen der Subtangente und der Senkrechten liegt, Subnormale.

In Fig. 13 ist $CR \perp CQ$; AR die Subnormale; da auch $AC \perp QR$, so erhält man: $AQ : AC = AC : AR$, oder

$$AR = \frac{AC^2}{AQ},$$

nun ist aber $AC = v$, $AQ =$ Subtangente $= v.\varphi$, daher

$$AR = \frac{v^2}{v.\varphi} = \frac{v}{\varphi};$$

wird in diese Gleichung für $\frac{v}{\varphi}$ der entsprechende Werth aus Gleichung 1 eingeführt, so ist:

$$AR = \frac{r}{2\pi}.$$

Die Subnormale ist also unveränderlich für alle Punkte derselben Spirale.

Dasselbe Resultat erhält man auch auf folgende Art:

AR = AC. tg. ACR, oder, da AC = v und ACR = 90° — QCA = 90° — α, so ist:

$$AR = v.\ tg.\ (90^\circ - \alpha) = v.\ cotg.\ \alpha,$$ oder

$$AR = \frac{v.}{tg.\alpha},$$ nach früheren ist aber $tg.\alpha = \varphi$, also

$$AR = \frac{v}{\varphi} = \frac{r}{2\pi}.$$

V. Normale.

Die Senkrechte, welche auf dem Berührungspunkte der Tangente errichtet ist und bis zur verlängerten Subtangente reicht, heißt Normale.

In (Fig. 13) ist CR die Normale; weil sie mit AC = v und $AR = \frac{r}{2\pi}$, ein rechtwinkliges Dreieck bildet, so ist:

$$CR = \text{Normale} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{r}{2\pi}\right)^2},$$

oder für v den Werth aus Gleichung 1 eingeführt:

$$CR = \frac{r}{2\pi}\sqrt{(\varphi^2 + 1)}.$$

Dasselbe erhält man auch trigonometrisch, wie bei der Subtg., es ist: $\frac{AR}{CR} = \sin.\ ACR$, oder da $AR = \frac{r}{2\pi}$

und Winkel $ACR = 90^\circ - ACQ = 90^\circ - \alpha$,

$$CR = \frac{r}{2\pi.\ \sin(90-\alpha)} = \frac{r}{2\pi.\ \cos\alpha}, \text{ oder}$$

$$CR = \frac{r.\sqrt{1+tg.^2\alpha}}{2\pi} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{(1+\varphi^2)}.$$

Die Gleichung der Normalen kann man auf dieselbe Art erhalten, wie die Gleichung der Tangente. Für rechtwinklige Coordinaten ist die Gleichung dieser Linie:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - x_1), \text{ oder}$$

$$y(y_1-y_2) + x(x_1-x_2) = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} - (x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Werden die entsprechenden Werthe für polare Coordinaten eingeführt, nämlich:

$y = V\sin\Phi$, $y_1 = v_1 \sin\varphi_1$, $y_2 = v_2 \sin\varphi_2$ und

$x = V\cos\Phi$, $x_1 = v_1\cos\varphi_1$, $x_2 = v_2\cos\varphi_2$, so erhält man:

$$V[v_1\cos(\varphi_1-\Phi) - v_2\cos(\varphi_2-\Phi)] = v_1^2 - v_1 v_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

daher $$V = \frac{v_1^{\,2} - v_1 v_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)}{v_1\cos(\varphi_1-\Phi) - v_2\cos(\varphi_2-\Phi)}.$$

Rücken nun die Punkte $(\varphi_1 v_1)$ und $(\varphi_2 v_2)$ einander unendlich nahe und werde daher: $v_2 = v$, $v_1 = v + dv$; $\varphi_2 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi + d\varphi$, so ist:

$$V = \frac{(v+dv)^2 - (v+dv)\, v\cos d\varphi}{(v+dv)\cos((\varphi-\Phi)+d\varphi) - v.\cos(\varphi-\Phi)}, \text{ wird}$$

reducirt, so ist

$$V = \frac{v.\,dv}{dv\cos(\varphi-\Phi) - v\sin(\varphi-\Phi)\,d\varphi}, \text{ durch } d\varphi \text{ getheilt:}$$

$$V = \frac{\frac{v\,dv}{d\varphi}}{\frac{dv}{d\varphi}\left[\cos(\varphi - \Phi) - \frac{v}{dv}\sin(\varphi - \Phi)\,d\varphi\right]},$$ und für

$\frac{dv}{d\varphi}$ aus Gleichung 1 der Werthe eingeführt, so ist:

$$V = \frac{\frac{r}{2\pi}(2n\pi + \varphi).\frac{r}{2\pi}}{\frac{r}{2\pi}\left[\cos(\varphi - \Phi) - (2n\pi + \varphi)\sin(\varphi - \Phi)\right]},$$ oder

$$V = \frac{\frac{r}{2\pi}(2n\pi + \varphi)}{\cos(\varphi - \Phi) - (2n\pi + \varphi)\sin(\varphi - \Phi)},$$ daher die

Gleichung der Normalen:

[1]) $$V = \frac{2n\pi + \varphi}{\frac{2\pi}{r}.\left[\cos(\varphi - \Phi) - (2n\pi + \varphi)\sin(\varphi - \Phi)\right]};$$

in dieser Gleichung haben die einzelnen Größen dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung der Tangente.

Da die Subnormale eine constante Größe ist, so muß der Ort für den Durchschnittspunkt der Normalen mit der Subnormalen eine Kreislinie sein, deren Radius die Subtangente $\left(= \frac{r}{2\pi}\right)$ ist.

Wird der Vector der Spirale dem Radius dieses Kreises gleichgesetzt, so erhält man den Durchschnittspunkt beider Linien,

---

[1]) Grunert: Polarcoordinaten. p. 147.

$$\text{nämlich } \frac{r}{2\pi} = \frac{r\varphi}{2\pi}, \text{ oder}$$

$$1 = \varphi.$$

Der Radius für diesen Durchschnittspunkt bildet also mit der ersten Geraden oder der Axe einen Winkel von 57° 17′ 44″,5.

Diese Eigenschaft der Subnormalen gibt ein sehr bequemes Mittel, Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale durch Construction zu erhalten. Es ist nämlich nur nöthig, mit dem Radius $\frac{r}{2\pi}$ einen Kreis um den Anfangspunkt der Spirale zu beschreiben, den Vector für den gegebenen Punkt der Spirale zu ziehen, vom Anfangspunkte aus einen dazu senkrechten Radius zu errichten, welcher Subnormale wird, die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit dem gegebenen Punkte in der Spirale gibt die Normale, eine dazu senkrechte, vom gegebenen Punkte der Spirale aus errichtet und die Subnormale bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert, geben Tangente und Subtangente.

VI. Krümmungshalbmesser.

Um die Länge des Krümmungshalbmessers für gegebene Punkte der Spirale zu erhalten, seien **BE** und **CP** (Fig. 15) Tangenten an der Spirale für die zwei unendlich nahen Punkte

B und C, BD und CD die zugehörigen Normalen; ferner sei $\sphericalangle$ EBA $= \alpha$; $\sphericalangle$ PCE $= \delta$; $\sphericalangle$ PCA $= \nu$; $\sphericalangle$ BDC $= \varepsilon$, $\sphericalangle$ BAC $= \eta$ und BD $= \varrho =$ Radius des Krümmungskreises. Nun ist der Bogen BC $=$ ds $= \varrho.\varepsilon$, daraus:

$$\varrho = \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Es ist ferner $\varepsilon = \delta = (\nu - \alpha) + \eta$, da B und C unendlich nahe sind, so wird $\nu - \alpha = d.\ arc\ \alpha = d.\ arc\ tg.\ v \frac{d\varphi}{dv} = \frac{dv^2\, d\varphi}{dv^2 + v^2\, d\varphi^2}$ und $\eta = d\varphi$, also:

$$\varepsilon = \frac{2dv^2\, d\varphi + v^2\, d\varphi^3}{dv^2 + v^2\, d\varphi^2}.$$

Da das Differential des Bogens: $ds = \sqrt{v^2 d\varphi^2 + dv^2}$ ist, so erhält man für:

$$\varrho = \frac{\sqrt{(v^2 d\varphi^2 + dv^2)^3}}{2dv^2\, d\varphi + v^2\, d\varphi^2},$$

führt man in diese Gleichung die Werthe für v und dv aus Gleichung 4 ein, so wird:

$$\varrho = \frac{r}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{(1 + \varphi^2)^3}}{2 + \varphi^2},$$ oder durch den Vector bestimmt:

$$^{1)}\ \varrho = \frac{\left(\left(\frac{r}{2\pi}\right)^2 + v^2\right)^{3/2}}{2.\left(\frac{r}{2\pi}\right)^2 + v^2}$$

---

[1]) Eytelwein: Statik.

Wird $\varphi = o$ gesetzt, so erhält man $\varrho = 0{,}079577 . r$, mit welchem Krümmungshalbmesser die Spirale ihren Lauf beginnt; für $\varphi = 2\pi$, ist $\varrho = 0{,}988173.\ r$ und

für $\varphi = 4\pi$, wird $\varrho = 1{,}99377.\ r$.

VII. Evolute.

Für den Ort der Krümmungsmittelpunkte oder die Evolute erhält man, wenn (Fig. 15) **AB** = Vector = v; **BD** = Krümmungshalbmesser = ϱ und **AD** = Vector der Evolute = μ ist, aus dem Dreiecke **BAD**:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB,\ BD \cos ABD, \text{ oder}$$

$$\mu^2 = v^2 + \varrho^2 - 2v.\varrho . \cos ABD.$$

Da aber $\sphericalangle$ **ABD** = 90° — **EBA** = $90^3 - \alpha$ ist, so wird

$$\cos ABD = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}},$$

$$\text{also } \mu^2 = v^2 + \varrho^2 - 2v\varrho \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}},$$

werden nun für v, ϱ, und tgα die früher erhaltenen Werthe eingeführt, so wird:

$$\mu = \frac{r}{2\pi}\sqrt{\left(\varphi^2 + \frac{(\varphi^2+1)^3}{(\varphi^2+2)^2} - 2\varphi^2\frac{\sqrt{(\varphi^2+1)^3}}{\varphi^2+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right)}$$

oder

$$\mu = \frac{r}{2\pi}\sqrt{\left(\varphi^2 + \frac{(\varphi^2+1)^3}{(\varphi^2+2)^2} - 2\varphi^2\frac{\varphi^2+1}{\varphi^2+2}\right)}, \text{ und nach}$$

weiterer Reduction:

$$\mu = \frac{r}{2\pi(\varphi^2+2)}\sqrt{\varphi^4+3\varphi^2+1}.$$

Daraus erhält man: Diff.

		Diff.
für $\varphi = 0$	$, \mu = 0{,}079577.r$	
		$0{,}077587$ r.
„ $\varphi = 2\pi$	$, \mu = 0{,}157164.r$	
		$0{,}001475$ r.
„ $\varphi = 2.2\pi$	$, \mu = 0{,}158639.r$	
		$0{,}000379$ r.
„ $\varphi = 3.2\pi$	$, \mu = 0{,}158918.r$	
		$0{,}000096$ r.
„ $\varphi = 4.2\pi$	$, \mu = 0{,}159014.r$	
		$0{,}000045$ r.
„ $\varphi = 5.2\pi$	$, \mu = 0{,}159059.r$	

Daraus folgt, daß die Evolute der Archimedischen Spirale selbst wieder eine Spirale ist, die sich bis gegen das Ende der ersten Windung verhältnißmäßig schnell vom Anfangspunkte entfernt, deren folgende Windungen aber dann immer enger werden.

VIII. Fußpunktlinie.

Werden von irgend einem Punkte (Pol) in der Ebene einer Curve auf die Tangenten dieser Curve senkrechte Linien gezogen, so ist der Ort der Durchschnittspunkte dieser senkrechten Linien mit den Tangenten die Fußpunktlinie.

Nimmt man den Pol der Fußpunktlinie für die Archimedische Spirale in dem Anfangspunkte dieser Linie an, so erhält man (Fig. 15), da **AH** $\perp$ **EB** und **AH** $\parallel$ **BK**, **AB** $\perp$ **AK**, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **AHB** und **BAK**:

AH : AB = AB : BK oder, weil AB = Vector = v, und BK = Normale = N, so erhält man für AH = η

$$\eta = \frac{v^2}{N}.$$

Werden in diese Gleichung für v und N die früher erhaltenen Werthe eingeführt, so wird:

$$\eta = \frac{r}{2\pi} \cdot \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

Bestimmt man η durch v und φ, so wird $\eta = v. \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, oder durch v und den Winkel α, welchen die Tangente mit dem Vector bildet, bestimmt: $\eta = v. \sin \alpha$.

Da Winkel α von 0 bis 90° wachsen kann, so sind die Grenzen von η : 0 und v; da ferner jeder Fußpunkt außerhalb der entsprechenden Spiralwindung liegen muß, so muß auch die Fußpunktlinie die Spirale umschließen und sich dieser immer mehr nähern ohne sie je zu schneiden.

IX. Rectification.

Um die Länge der Spirale zu erhalten, sei (Fig. 13) Winkel CAM = $\triangle\varphi$, AC = v, BM = $\triangle$v und CM = $\triangle$S; ist ferner CB $\perp$ AM, so wird:

$$CM = (CB^2 + BM^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder:}$$

$$\triangle S = (v^2 . \sin^2 \triangle\varphi + \triangle v^2)^{\frac{1}{2}};$$ geht $\triangle\varphi$ über in dφ, so geht auch $\triangle$ v über in dv, ferner $\triangle$ S in ds und man erhält:

$$ds = (v^2 . \sin{}^2 d\varphi + dv^2)^{\frac{1}{2}}$$, oder für sin $d\varphi$ den Bogen $d\varphi$ gesetzt:

$$ds = (v^2 . d\varphi^2 + dv^2)^{\frac{1}{2}}$$ und für v und dv die entsprechenden Werthe eingeführt:

$$ds = \frac{r}{2\pi}(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$ und der Spiralbogen

$$S = \frac{r}{2\pi}\int(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Durch theilweise Integration wird:

$$S = \frac{r}{2\pi}\varphi(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{2\pi}\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + C_1,$$

für $\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \int(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\varphi - \int\frac{d\varphi}{(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$

und $\int\frac{d\varphi}{(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \lg n\,(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) + C_2$

wird:

$$S = \frac{r}{4\pi}(\varphi(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \lg n\,(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) + C),$$

worin $C = C_1 + C_2$; da aber für $\varphi = 0$ auch $S = 0$ wird, ist:

[1]) $$S = \frac{r}{4\pi}(\varphi(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \lg n\,(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}))\ldots\ldots[1]).$$

Setzt man in der Gleichung:

$$2\int(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \varphi(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \int\frac{d\varphi}{(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}},$$ $\varphi = \tang\omega$,

so wird: $$2\int(\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega} - \lg n\,\tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right),$$

---

[1]) Lacroix: Tr. du cal. dif. ect. T. II, p. 185.
Junge: Die Spirale des Archimedes; Zeitz, 1826.

also: $S = \frac{r}{4\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\cos^2\omega} - \text{logn. tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)\right) \ldots 2.$

Führt man aus tang $\omega = \varphi$ wieder den Werth φ ein, so ist

$$S = \frac{r}{8\pi}\left(2\varphi\sqrt{(\varphi^2+1)} + \text{logn.}\frac{\sqrt{\varphi^2+1}+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}-\varphi}\right) \ldots 3.$$

[1]) Grunert entwickelt die Gleichung 2 noch weiter für die Grenzen tg $\alpha_1 = 2n\pi + \alpha$ und tg $\beta_1 = 2n\pi + \beta$, wenn α_1 und $\beta_1 > 0$ und $< \frac{\pi}{2}$ ist; so daß:

$$S = \frac{r}{4\pi}\left(\frac{\sin\beta_1}{\cos^2\beta_1} - \frac{\sin\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} - \text{logn.}\frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_1}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_1}{2}\right)}\right)$$

und daraus durch Einführung des Hilfswinkels ϑ aus

$$\cos\vartheta = \sin\alpha_1 \sin\beta_1$$

$$S = \frac{r}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta_1-\alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_1+\alpha_1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\alpha_1\cos^2\beta_1} - \frac{1}{4}\,\text{logn.}\frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_1}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_1}{2}\right)}\right) \ldots 4$$

wird $n = 0$, $\alpha_1 = 0$ und $\beta_1 = 2\pi$, so erhält Grunert aus der letzten Gleichung für die erste ganze Windung:

$$S = \frac{r}{4\pi}\left(\frac{\sin 80^\circ\ 57'\ 24'',96}{\cos^2 80^\circ\ 57'\ 24'',96} - \text{logn. tang}\,4^\circ 31'\ 27'',52\right).$$

Jede der Gleichungen 1, 3, 4 gibt für

$\varphi = 0 \quad , \quad S_0 = 0$

$\varphi = 2\pi \quad , \quad S_1 = 3{,}383039 \,.\, r$

$\varphi = 4\pi \quad , \quad S_2 = 12{,}86281 \,.\, r$

---

[1]) Polarcoordinaten: p. 241 u. 242.

$$\varphi = 6\pi \quad , \quad S_3 = 28{,}60297 \ . \ r$$
$$\varphi = 8\pi \quad , \quad S_4 = 50{,}91702 \ . \ r.$$

Mit diesen Resultaten stimmen die Sätze, welche Wallis für die Rectification seiner Spirale erhalten hat, nicht überein. Wallis definirt zwar (in Prop. V) die Spirale etwas anders, und wiederholt (in Prop. XIII, Scholium):

«— me spiralis appellationem abusive usum fuisse: Nempe per spiralem (quoties ea ad peripheriam comparatur,) intellectum vellem: aggregatum omnium arcuum sectorum similium numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero sectoribus spirali verae inscripta», bemerkt aber weiter «qua scil. et nos ad prop. V ect. et Archimedes ad prop. XXI ect. usi sumus,» — und: «—quod quidem aggregatum ipsa linea spirali, proprio sensu sumpta, perpetuo minus est et maxime quidem circa spiralis initium»; so läßt sich auf das Scholium (Prop. XVIII): «Tota haec de longitudine lineæ spiralis doctrina — — apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omissa,» die Ansicht nicht ganz zurückweisen, daß er diese Rectification nicht auch auf die eigentliche Archim. Spirale angewandt wissen wollte.

Die Sätze selbst, welche Wallis rücksichtlich der Rectification seiner Curve aufstellt, erhält man mittels des Bogendifferentials dieser Kreissectoren; es ist dann

$$\text{Bogen} = \int v . d\varphi = \frac{r}{2\pi}\int \varphi \, d\varphi = \frac{r\varphi^2}{4\pi}.$$

Die Constante C wird wie bei der eigentlichen Spirale gleich 0. Wird $\varphi = 2\pi$, so erhält man:

Bogen der ersten Windung: erster Kreislinie $= \frac{4r\pi^2}{4\pi} : 2\pi r =$ 1 : 2. Satz 31 (Wallis Prop. V).

Bogen der zwei ersten Windungen: zweiter Kreislinie $=$ $\frac{r.(4\pi)^2}{4\pi} : 2.2r.\pi = 1 : 1.$ Satz 31, b.

Der Bogen der drei ersten Windungen ist $= \frac{r\,(6\pi)^2}{4\pi} =$ $9r\pi = \frac{3.\;2.\;(3r)\pi}{2}$, also gleich der Hälfte der dreifachen dritten Kreislinie; ebenso erhält man allgemein für den Bogen der n ersten Windungen $= \frac{n.\;2\,(nr)\,\pi}{2}$ und den Satz 32:

$$S_1 : S_1 + S_2 : S_1 + S_2 + S_3 : = \frac{r}{4\pi}.(2\pi)^2 : \frac{r}{4\pi}.(4\pi)^2 : \frac{r}{4\pi}(6\pi)^2 \ldots = 1 : 4 : 9 \ldots$$

wenn S_1, S_2, S_3 dasselbe bedeuten wie in genanntem Satze.

Bezeichnen S und σ zwei Bogen, die vom Anfangspunkte ausgehen und deren größte Vectoren v und ϱ sind, so ist:

$$S : \sigma = \frac{\pi}{r}.v^2 : \frac{\pi}{r}.\varrho^2 = v^2 : \varrho^2$$

(Satz 32 a).

Sind die Radien der ersten Kreislinien zweier Spiralen R und r, so erhält man:

$$S : \sigma = \frac{\pi}{R}.v^2 : \frac{\pi}{r}\varrho^2 \quad \text{und wenn } v = \varrho$$

$$S : \sigma = r : R \quad \text{(Satz 32, c).}$$

Diese [1]) Rectification paßt also wohl auf die von Wallis definirte Curve, aber nicht zur Archimedischen Spirale. Bezeichnet D_1 den Unterschied zwischen der ersten Windung der Archimedischen und der von Wallis definirten Spirale, in gleicher Weise D_2 den Unterschied der zwei ersten Windungen beider Curven u. s. w., so ist:

$$D_1 = 0{,}24144.r$$
$$D_2 = 0{,}29644.r$$
$$D_3 = 0{,}32846.r$$
$$D_4 = 0{,}35154.r$$

X. Quadratur.

Ist (Fig. 15) **BAC** ein Spiralsector der ersten Windung und der Winkel **BAC** $= d\varphi$, so wird, wenn **AB** $= v$, **AC** $= v + dv$ und der Inhalt dieses Sectors:

$$\tfrac{1}{2} v (v + dv) \sin d\varphi = \tfrac{1}{2} v (v d\varphi + dv\, d\varphi) = \tfrac{1}{2} v^2\, d\varphi,$$

also die Spiralfläche =

$$\tfrac{1}{2}\int v^2\, d\varphi = \frac{r^2}{8\pi^2}\int \varphi^2\, d\varphi = \frac{r^2\varphi^3}{24.\pi^2}\ .\ .\ .\ 1,$$

oder durch den Vector bestimmt, ist

$$\text{die Spiralfläche} = \frac{\pi}{3r}\,.\,v^3\ .\ .\ .\ 2.$$

Da für $\varphi = 0$ auch die Fläche 0 wird, so ist auch die zu ergänzende Constante **C** = 0.

---

[1]) F. H. Sloman Dr. „Leibnitzens Anspruch auf die Erfindung der Differenzialrechnung. Leip. 1857, p. 18.

Bei den Spiralflächen sind zu unterscheiden:

I. Flächen, die immer vom Anfangspunkte ausgehen und bei denen sich die vorhergehenden Windungsflächen wiederholen, so als ob sie durch Projection einer conischen Spiralfläche entstanden wären, diese sollen erste Spiralfläche, zweite Spiralfläche u. s. f. heißen und mit F_1, F_2, . . . F_n bezeichnet werden.

II. Flächen, welche immer vom Anfangspunkte ausgehen, deren vorhergehende Windungen aber sich nicht wiederholen; diese sollen Flächen der ersten, zweiten, u. s. f. Windung heißen und mit W_1, W_2, . . . W_n bezeichnet werden.

III. Flächen, welche nicht vom Anfangspunkte ausgehen und bei denen sich die vorhergehenden nicht wiederholen; sie sollen Spiralringe heißen und mit R_1, R_2, . . . R_n bezeichnet werden.

Jede der genannten Flächen kann wieder ihre besonderen Sectoren haben. Nach diesen Definitionen ist:

$$F_1 = F_1$$

$$F_2 = 2F_1 + R_1$$

$$F_3 = 3F_1 + 2R_1 + R_2$$

$$F_4 = 4F_1 + 3R_1 + 2R_2 + R_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$F_n = nF_1 + (n-1)R_1 + (n-2)R_2 + \ldots + R_{n-1}$$

$$W_2 = F_2 - F_1$$

$$W_3 = F_3 - F_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$W_n = F_n - F_{n-1}$$

$$R_1 = F_2 - 2F_1 = W_2 - F_1$$

$$R_2 = W_3 - W_2$$

$$R_3 = W_4 - W_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$R_n = W_{n+1} - W_n.$$

Ist $\varphi = 2\pi$, so wird F_1 oder $W_1 = \frac{r^2(2\pi)^3}{24\,\pi^2} = \frac{r^2\pi}{3}$ (Satz 24 des Arch.).

Wenn $\varphi = 4\pi$, ist $F_2 = \frac{r^2(4\pi)^3}{24\pi^2} = 8.\frac{r^2\pi}{3} = 2.\frac{(2r)^2\pi}{3}$

$$\varphi = 6\pi, \text{ „ } F_3 = \frac{r^2(6\pi)^3}{24\pi^2} = 27.\frac{r^2\pi}{3} = 3.\frac{(3r)^2\pi}{3}$$

$$\varphi = 8\pi, \text{ „ } F_4 = \frac{r^2(8\pi)^3}{24\pi^2} = 64.\frac{r^2\pi}{3} = 4.\frac{(4r)^2\pi}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi = n.2\pi \text{ „ } F_n = \frac{n^3r^2\pi}{3} = n.\frac{(nr)^2\pi}{3}$$

Daraus folgt: $F_1 : F_2 : F_3 \ldots = 1 : 8 : 27 : \ldots n^3$ (cf. Sätze 29, 33 und 34).

Wird das Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_0 genommen, so ist der Flächeninhalt:

$$W = \frac{r^2}{8\pi^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\varphi^2 d\varphi) = \frac{r^2}{24\pi^2}.(\varphi_1{}^3 - \varphi_0{}^3). \;.\;.\;.\; 3$$

und wird $\varphi_1 = 2(n+1)\pi$ und $\varphi_0 = 2n\pi$ gesetzt, so erhält man

$$W = \frac{r^2}{24\pi^2}.(2\pi)^3\Big((n+1)^3 - n^3\Big) = \frac{\pi r^2}{3}\Big((n+1)^3 - n^3\Big),$$

für $n = 0$ ist $W_1 = \frac{\pi r^2}{3}$

„ $n = 1$ „ $W_2 = \frac{7\pi r^2}{3}$

„ $n = 2$ „ $W_2 = \frac{19\pi r^2}{3}$

„ $n = 3$ „ $W_4 = \frac{37\pi r^2}{3}$

⋮ ⋮

Es verhält sich also

$W_1 : W_2 : W_3 \ldots = 1 : 7 : 19 \ldots : ((n+1)^3 - n^3)$.

(Satz 30; Pappus Th. **XXII**; Sätze 37, 38, Wallis **XXXIII** und **XXXIV**).

Ist K_1 die erste Kreisfläche; K_2 die zweite Kreisfläche ꝛc., so verhält sich $W_2 : K_2 = 7 : 12$ (Satz 25 des Arch.)

$W_3 : K_3 = 19 : 27$

$W_4 : K_4 = 37 : 48$.

Für die Spiralringe erhält man:

$$R_1 = W_2 - F_1 = 7\frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\pi}{3} = 6\frac{r^2\pi}{3}$$

$$R_2 = W_3 - W_2 = 19\frac{r^2\pi}{3} - 7\frac{r^2\pi}{3} = 12\frac{r^2\pi}{3}$$

$$R_3 = W_4 - W_3 = 37\frac{r^2\pi}{3} - 19\frac{r^2\pi}{3} = 18\frac{r^2\pi}{3}$$

⋮ ⋮

Also $R_1 : R_2 : R_2 \ldots = 6 : 12 : 18 : \ldots : n.6$.

(Satz 27 des Arch.; Satz 39 oder **XXXV** bei Wallis).

Wird in der Gleichung:

$$W = \frac{r^2}{24\pi^2}\cdot(\varphi_1^{\,3} - \varphi_0^{\,3}),\quad \varphi_0 > 0 \text{ und } \varphi_1 > \varphi_0,$$

so giebt die Gleichung im Allgemeinen den Flächeninhalt eines Spiralsectors, bei welchem sich Flächen von einzelnen Windungen ganz oder theilweise wiederholen können, wenn:

$$\varphi_1 - \varphi_0 > 2\pi.$$

Ist $\varphi_1 - \varphi_0 = 2\pi$, so gibt die Gleichung den Flächeninhalt der letzten Windung und wenn $\varphi_1 - \varphi_0 < 2\pi$: den Flächeninhalt eines Sectors der letzten Windung.

Um den Flächeninhalt eines Ringstückes zu erhalten, in welchem keine Wiederholungen vorkommen, so hat man nur die Windungsunterschiede in die allgemeine Gleichung einzuführen, sind die Bogen für die Vectoren des ganzen Sectors: $\varphi_1 = 2n\pi + \psi_1$, $\varphi_0 = 2n\pi + \psi_0$ und die Bogen für die Vectoren des fehlenden Sectors:

$$\varphi_1 = 2\nu\pi + \psi_1,\ \varphi_0 = 2\nu\pi + \psi_0,$$

so ist der Inhalt des Ringstückes =

$$\frac{r^2}{24\pi^2}\left[(2n\pi+\psi)^3 - (2n\pi+\psi_0)^3 - (2\nu\pi+\psi_1)^3 + (2\nu\pi+\psi_0)^3\right] =$$

$$\frac{r^2}{24\pi^2}\left[(2n\pi+\psi_1)^3 + (2\nu\pi+\psi_0)^3 - \left((2n\pi+\psi_0)^3 + (2\nu\pi+\psi_1)^3\right)\right].$$

Bestimmt man in Gleichung 3 die Bogen φ_1 und φ_0 durch die entsprechenden Vectoren v_1 und v_0, so wird:

$$W = \frac{\pi}{3r}(v_1^{\,3} - v_0^{\,3})\ \ldots\ 4,$$

oder $$W = \frac{\pi}{3r} (v_1 - v_0)(v_1^2 + v_1 v_0 + v_0^2),$$

weil aber $v_1 - v_0 = \frac{r}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_0)$, so ist:

$$W = \tfrac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)(v_1^2 + v_1 v_0 + v_0^2),$$

oder $$W = \tfrac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)(3 v_1 v_0 + (v_1 - v_0)^2).$$

Bedeutet **Ks** den Flächeninhalt eines Kreissectors für den Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$ und den Radius v_1, so ist:

$$Ks = \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)\, v_1^2}{2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$W : Ks = \left(v_1 v_0 + \frac{(v_1 - v_0)^2}{3}\right) : v_1^2$$

(Satz 26 des Arch.).

XI. Spirale und Parabel.

Es wurde bereits (unter Nro. 41) angegeben, daß Hobbe und Roberval eine der Archimedischen Spirale und der Apollonischen Parabel gemeinsame Eigenschaft erkannt haben, und daß Wallis gezeigt hat (32, f und 42), wie die Parabel zur Spirale zusammengerollt oder die Spirale zur Parabel aufgerollt werden kann; daß sich ferner diese Spirale auch zur geraden Linie aufrollen läßt, folgt schon aus ihrer Definition (11, a), aus welchem Grunde sie auch **«lineare Spirale»** genannt wird.

Setzt man in Gleichung 1 für die Rectification der Spirale

$$\varphi = \frac{x}{p}, \text{ so wird:}$$

$$S = \frac{r}{4\pi}\left(\frac{x}{p}\sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2} + \text{lgn.}\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\right)\right).$$

Nun ist aber die Länge eines Parabelarmes vom Scheitelpunkte an gerechnet:

$$^{1})\, S_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{x}{p}\sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2} + \text{logn.}\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\right)\right),$$

wenn $y = \frac{x^2}{2p}$ die Gleichung der Parabel ist; daraus ererhält man:

$$\frac{r}{4\pi} = \frac{p}{2}, \text{ oder}$$

$$r = 2p\pi,$$

wodurch sich der Radius des ersten Kreises und der Parameter der Parabel gegenseitig bestimmen lassen.

Die Parabelfläche, welche begrenzt ist von einem vom Scheitelpunkte ausgehenden Parabelbogen und den zugehörigen orthogonalen Coordinaten ist:

$$Fl = \tfrac{2}{3}xy = \frac{x^3}{3p}.$$

Die Fläche der Spirale ist, nach Gleichung 1 der Quadratur:

$$Fl_1 = \frac{r^2\varphi^3}{24\pi^2} = \frac{r^2x^3}{24p^3\pi^2}, \text{ oder}$$

---

[1]) Schlömilch. Comp. d. höh. Anal.

$$Fl_1 = \left(\frac{r}{2p\pi}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3p},$$

da aber $r = 2p\pi$, so ist

$Fl_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3p}$, also ist die Spiralfläche halb so groß als die entsprechende Parabelfläche.

Die Subnormale der Parabel $\frac{x^2}{2p} = y$ ist p, und die Subnormale der Spirale ist: $\frac{r}{2\pi}$, wenn r der Radius des ersten Windungskreises ist; bestimmt man r durch den Parameter, so ist:

Die Subnormale der Spirale $= \frac{2p\pi}{2\pi} = p$.

Weitere Beziehungen dieser zwei Curven zu einander lassen sich leicht aufstellen.

Eine besondere Abhandlung über diesen Gegenstand hat [1]) Brendelius geliefert; daß das **III.** von seinen 19 Theoremen unrichtig ist, hat schon [2]) Klügel angegeben.

Noch auf eine andere Gruppe von Curven hat diese Spirale, wie [3]) D. H. Weißenborn gezeigt hat, eine Beziehung; sie ist nämlich die verkürzte Evolvente der Cycloiden.

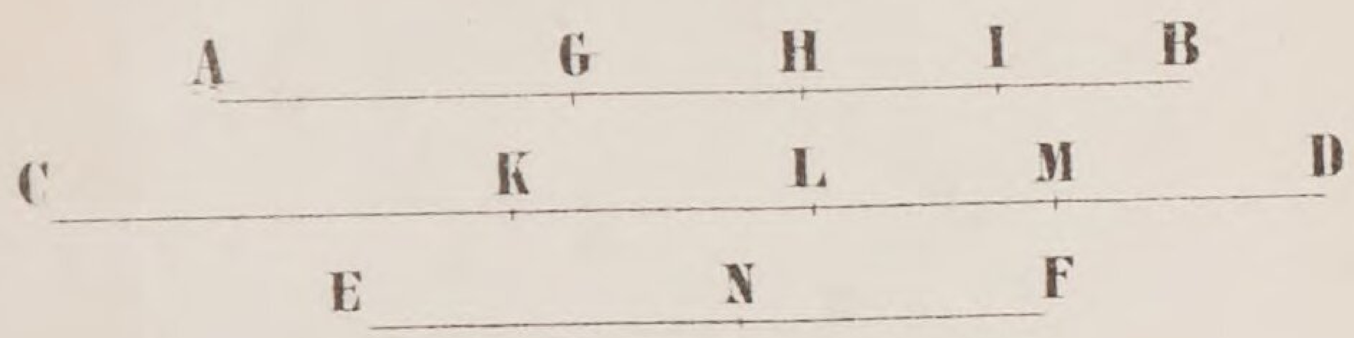
---

[1]) »De analogia lineæ spiralis et parabolæ« in: opusculorum math. et med. argum. Pars I. Gött. 1769.

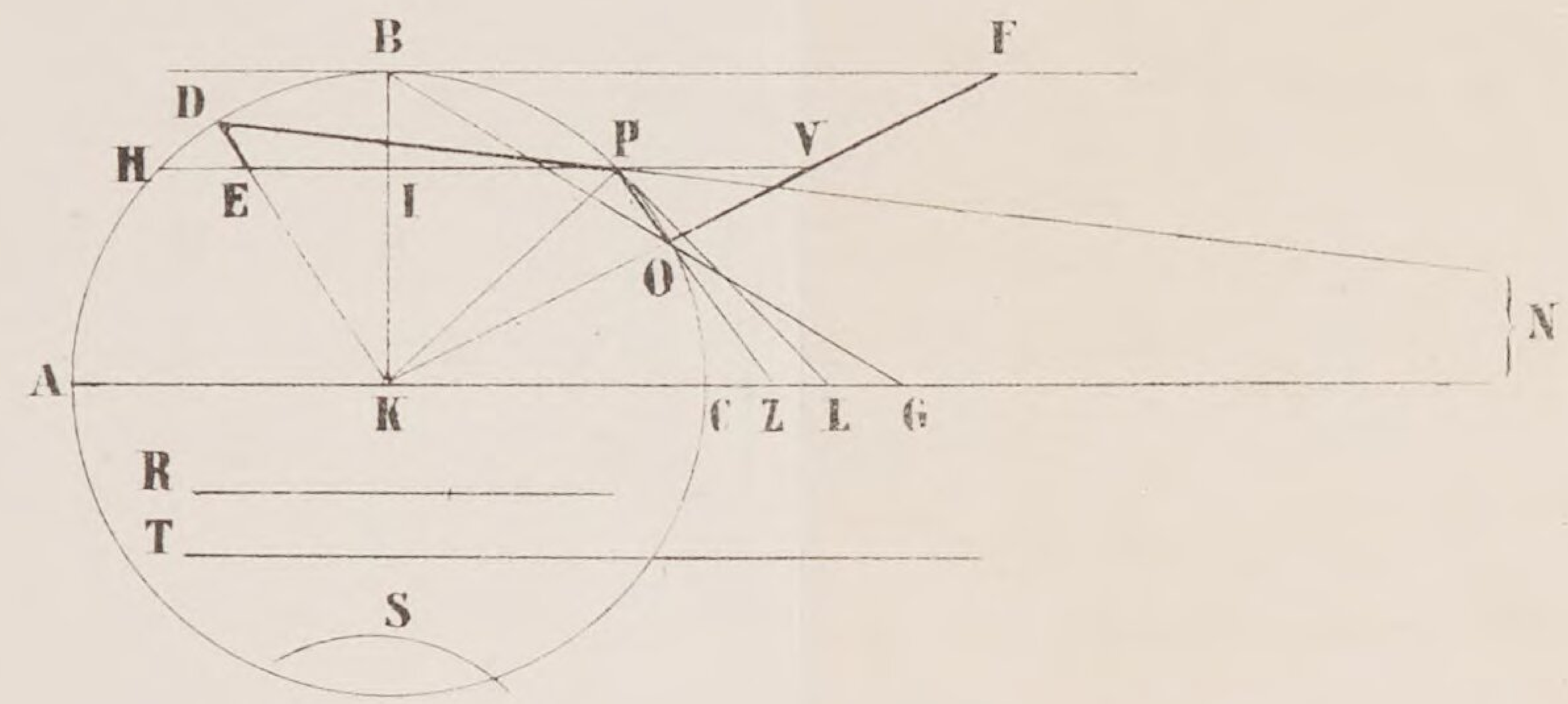
[2]) Klügel: Math. Wört. Art. Spirale.

[3]) Die cyclischen Curven. Eisenach. 1856. p. 190.

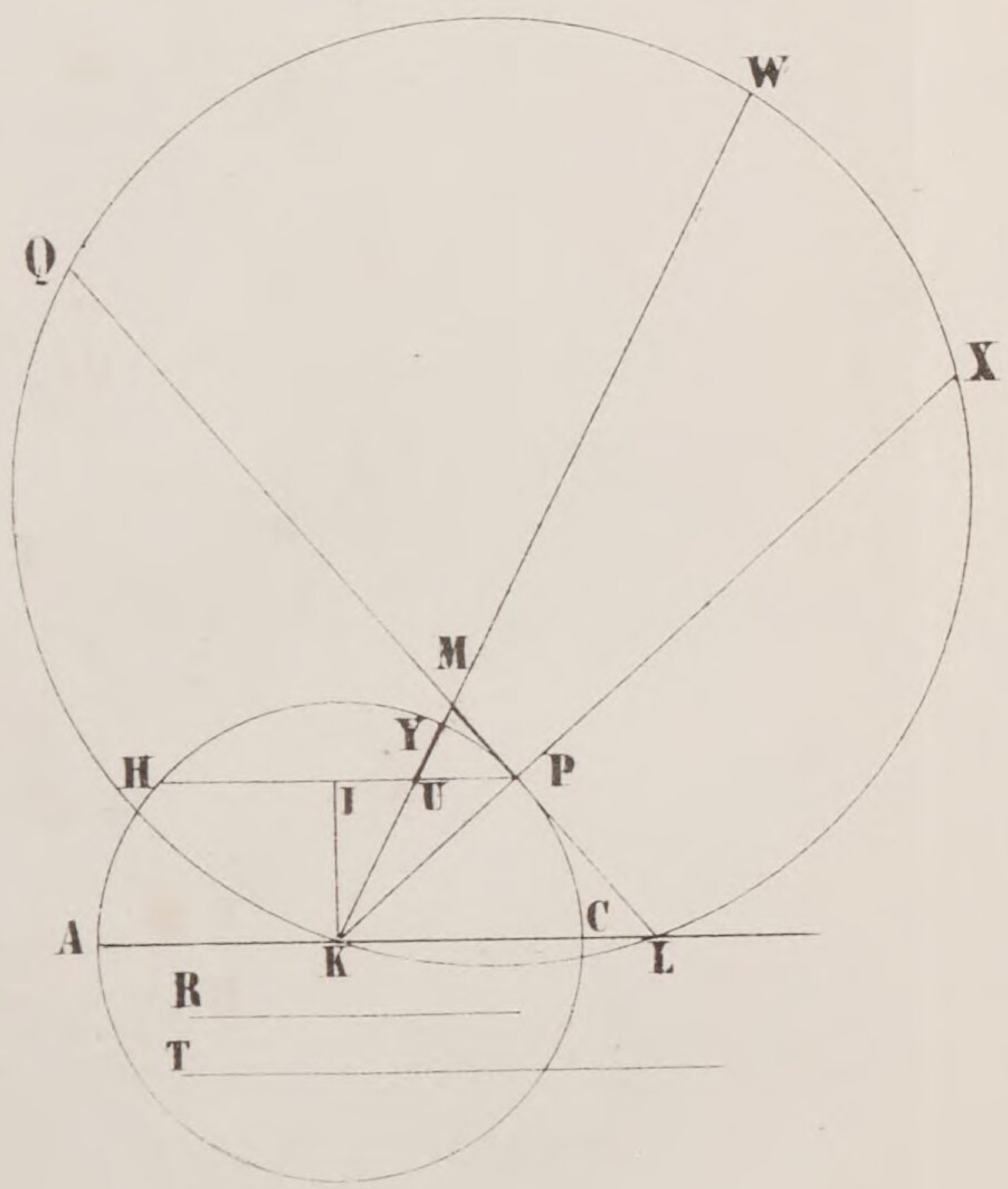
1.


A G H I B
C K L M D
E N F

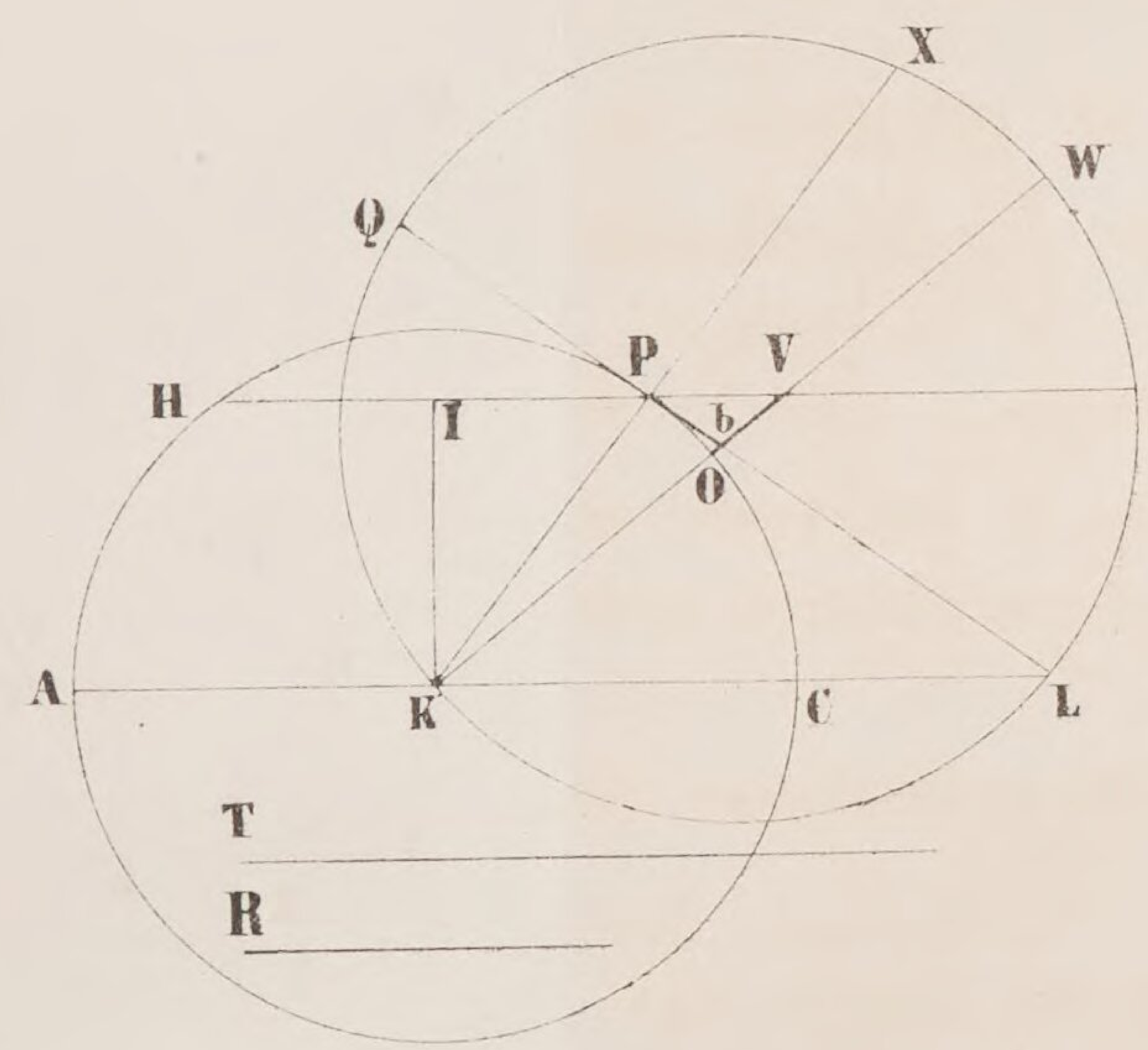
2.


B F
D
H P V
E I
O
N
A K C Z L G
R
T
S

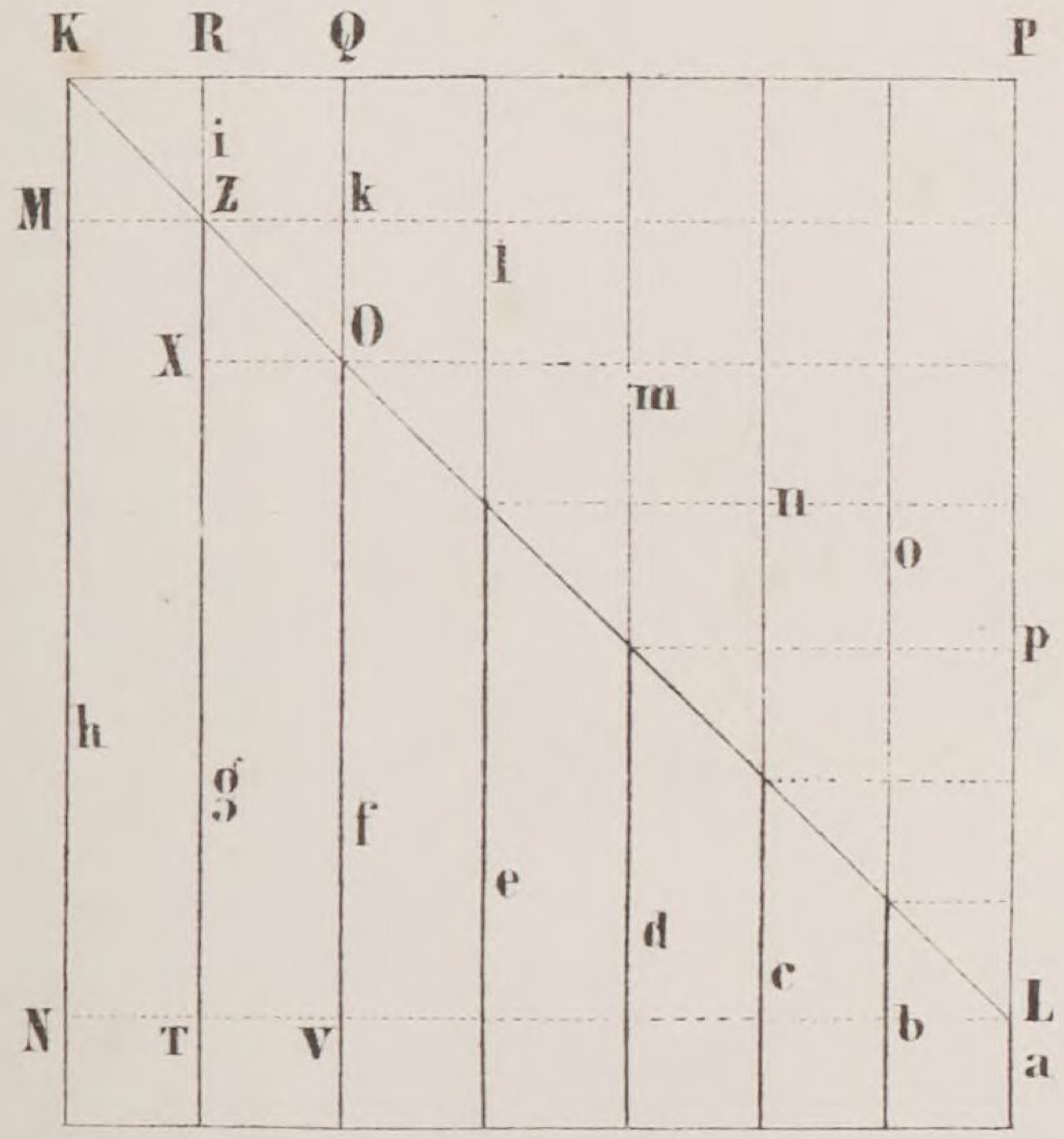
3.


W
Q
X
M
Y
H I U P
A K C L
R
T

3 a.

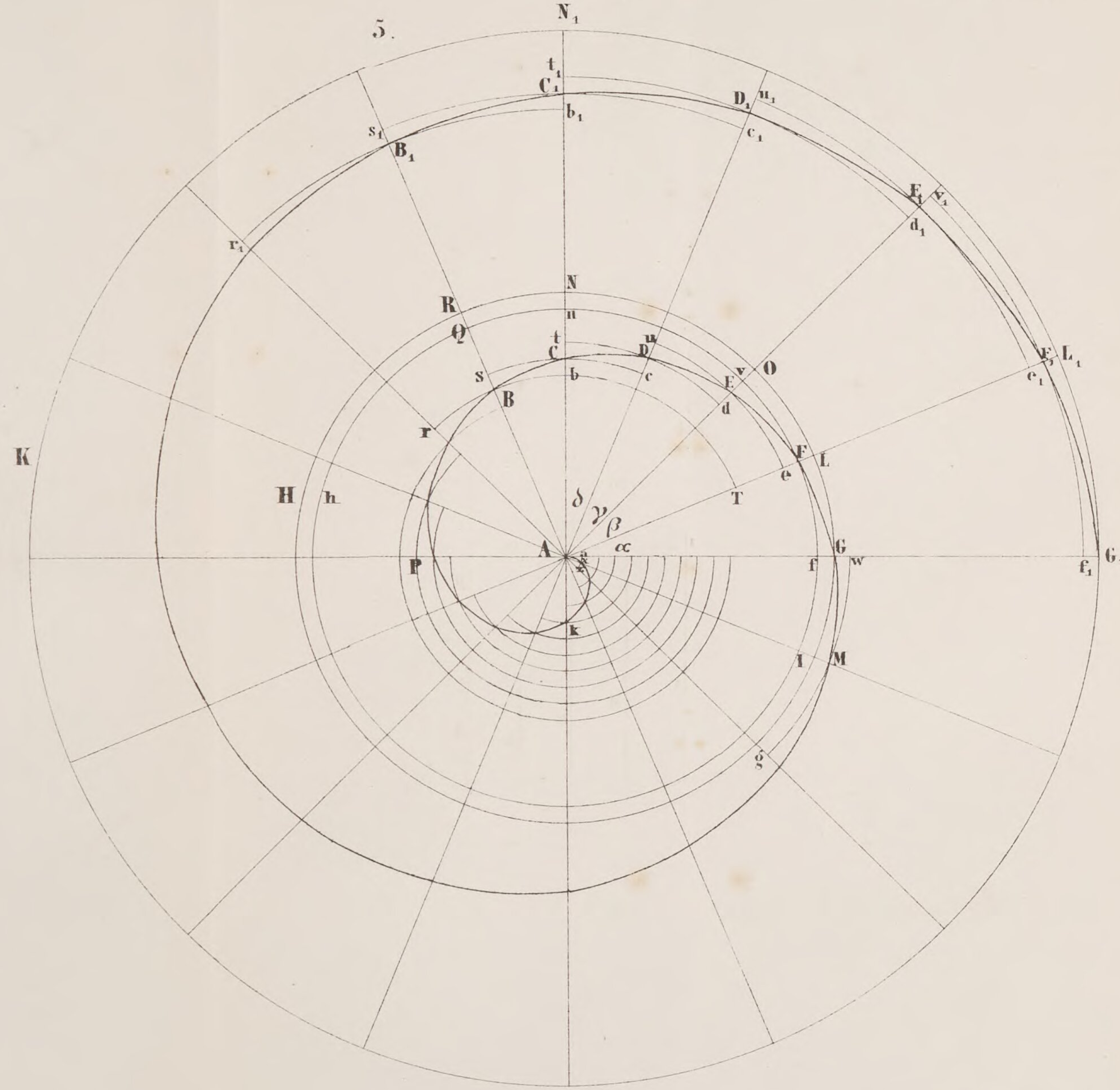

X
W
Q
P V
H I b
O
A K C L
T
R

4.

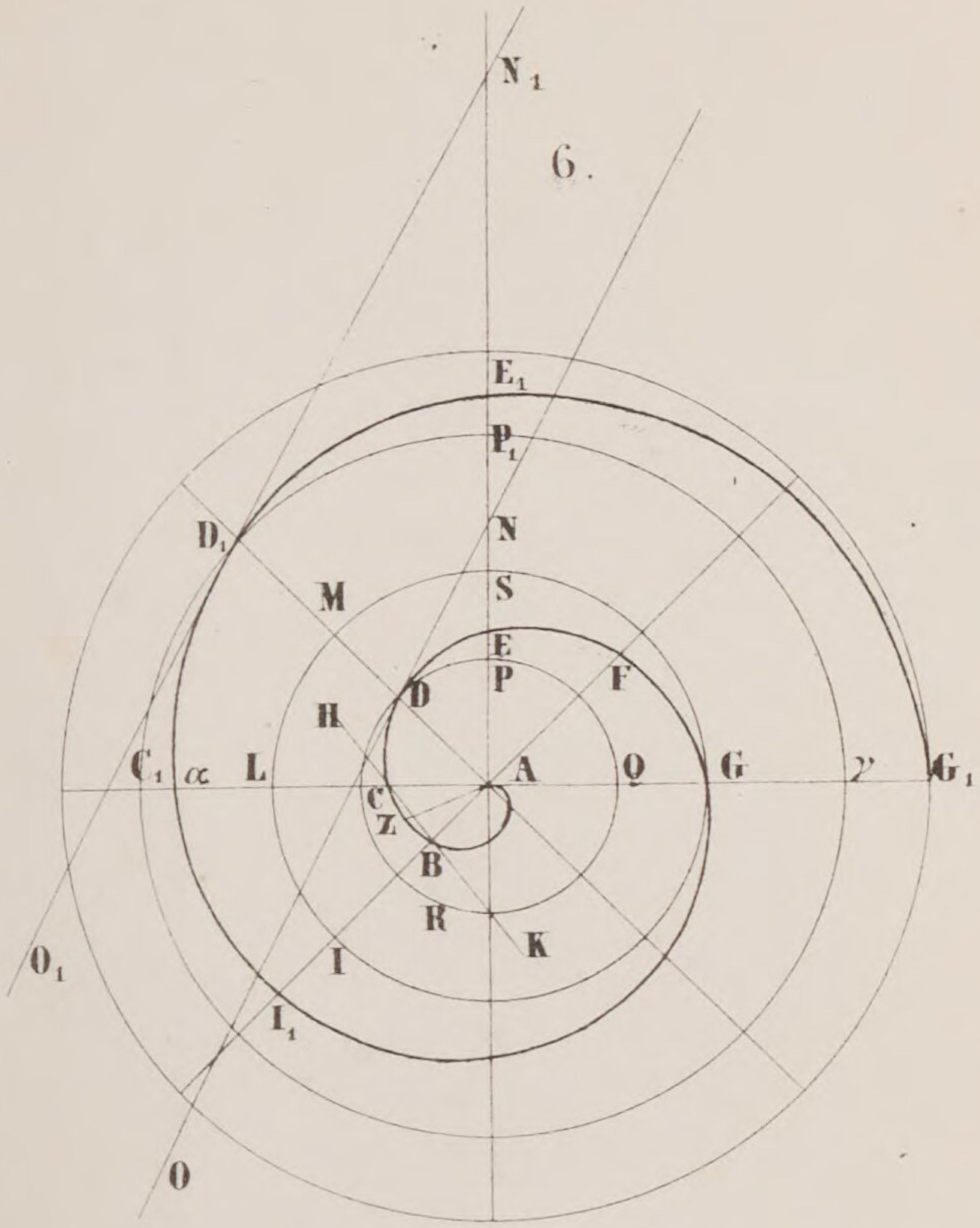


K
R
Q
P
M
i
Z
k
l
X
O
m
n
o
p
h
g
f
e
d
c
b
L
N
T
V
a

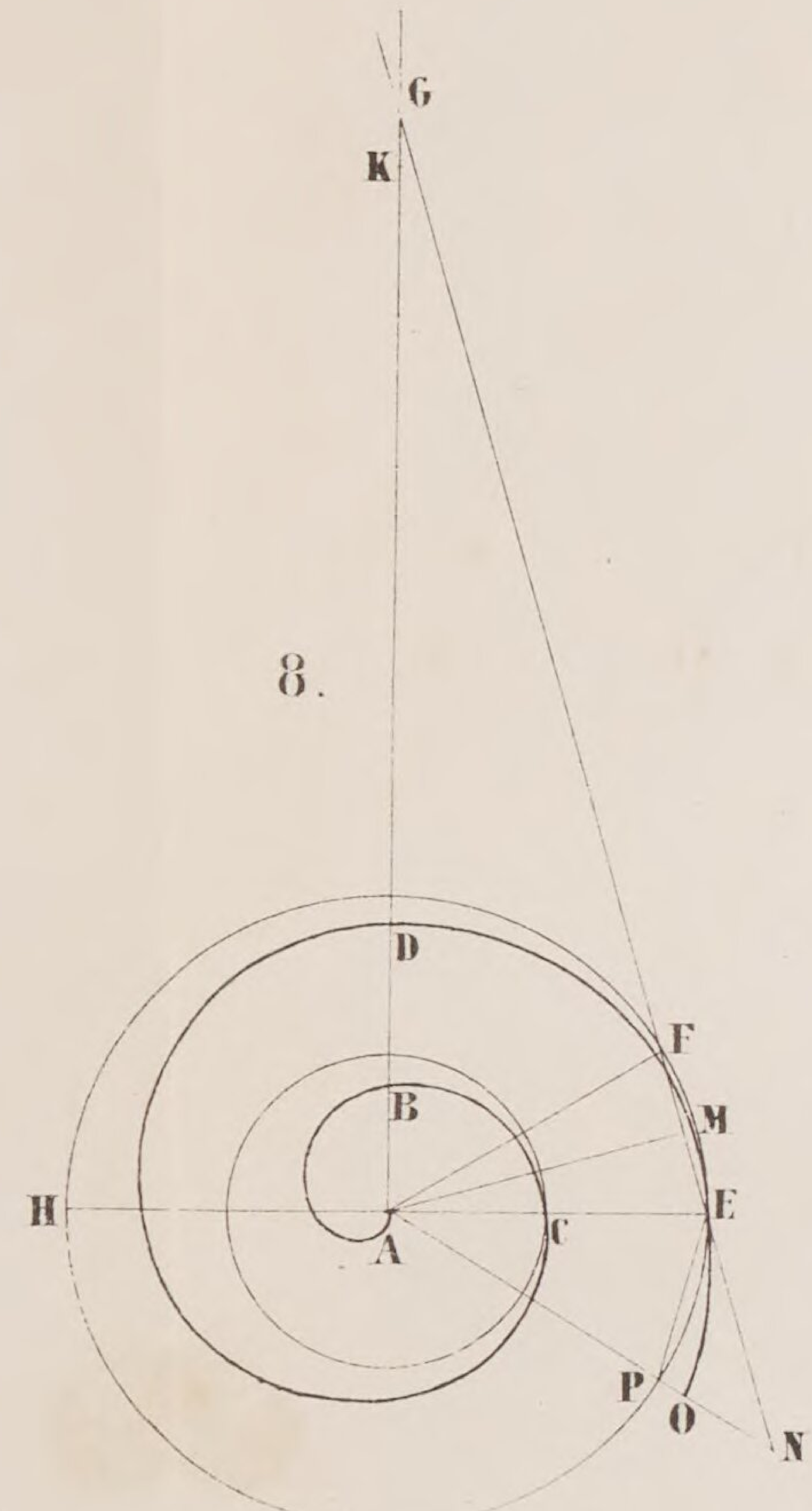
5.



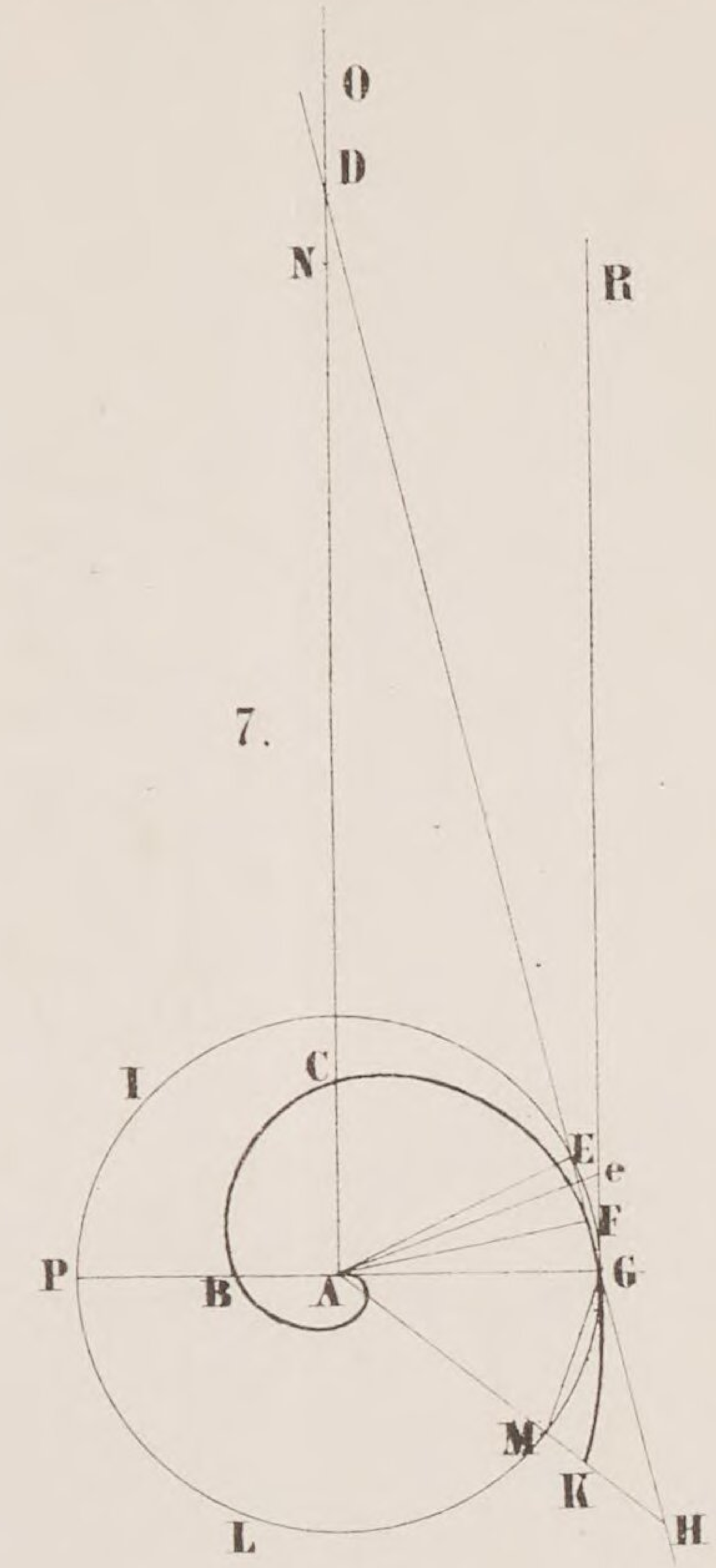
N_1
t_1
C_1
b_1
D_1
u_1
c_1
s_1
B_1
E_1
v_1
d_1
r_1
L_1
e_1
N
n
R
Q
t
C
b
s
B
D
u
c
E
v
O
d
r
F
L
e
K
H
h
T
δ
γ
β
α
A
P
G
w
f
f_1
G_1
k
I
M
g


N1
E1
P1
D1
N
M
S
E
P
D
F
H
C1
α
L
C
A
Q
G
γ
G1
Z
B
R
K
O1
I
I1
O

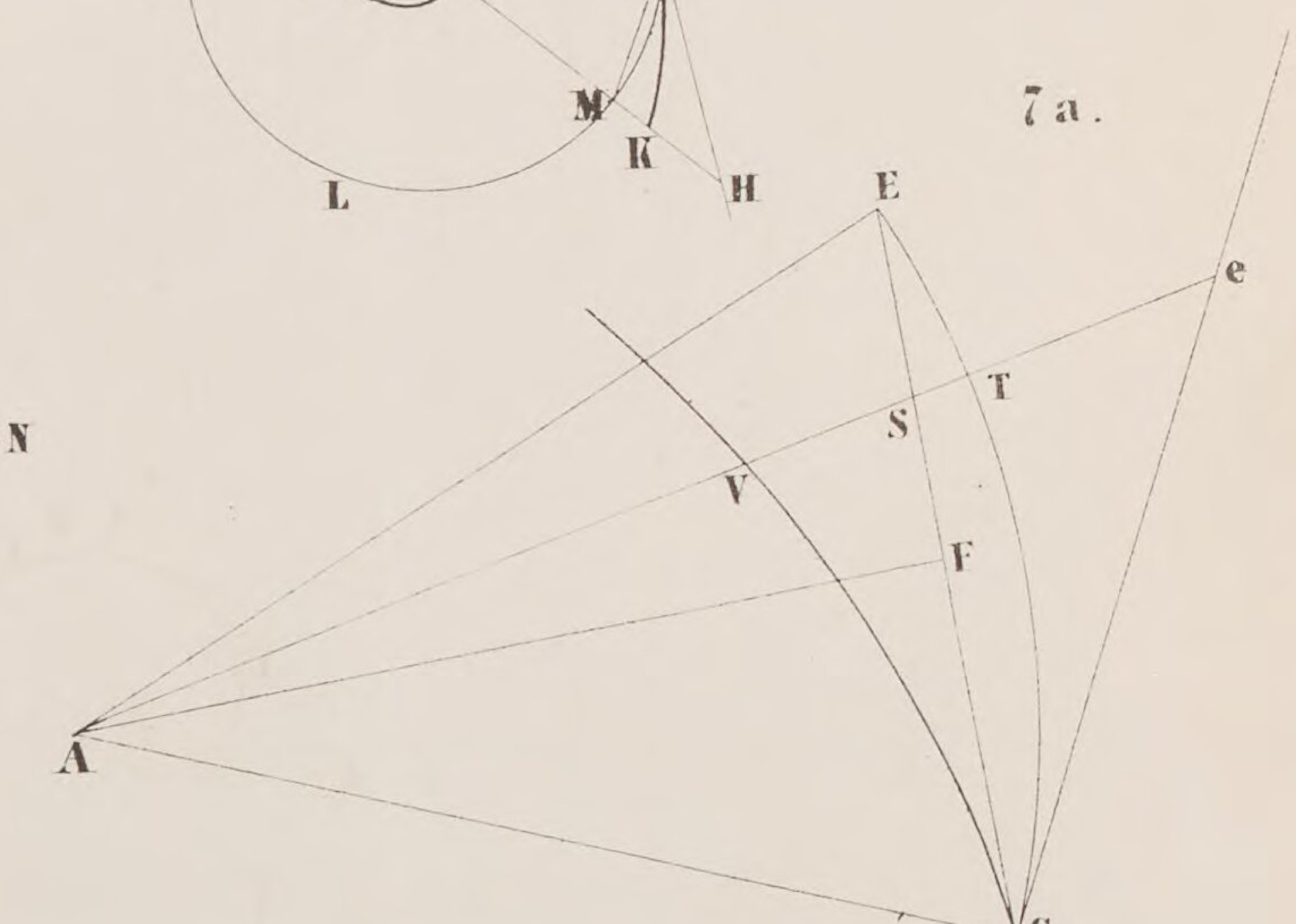
6.


G
K
D
F
B
M
H
E
A
C
P
O
N

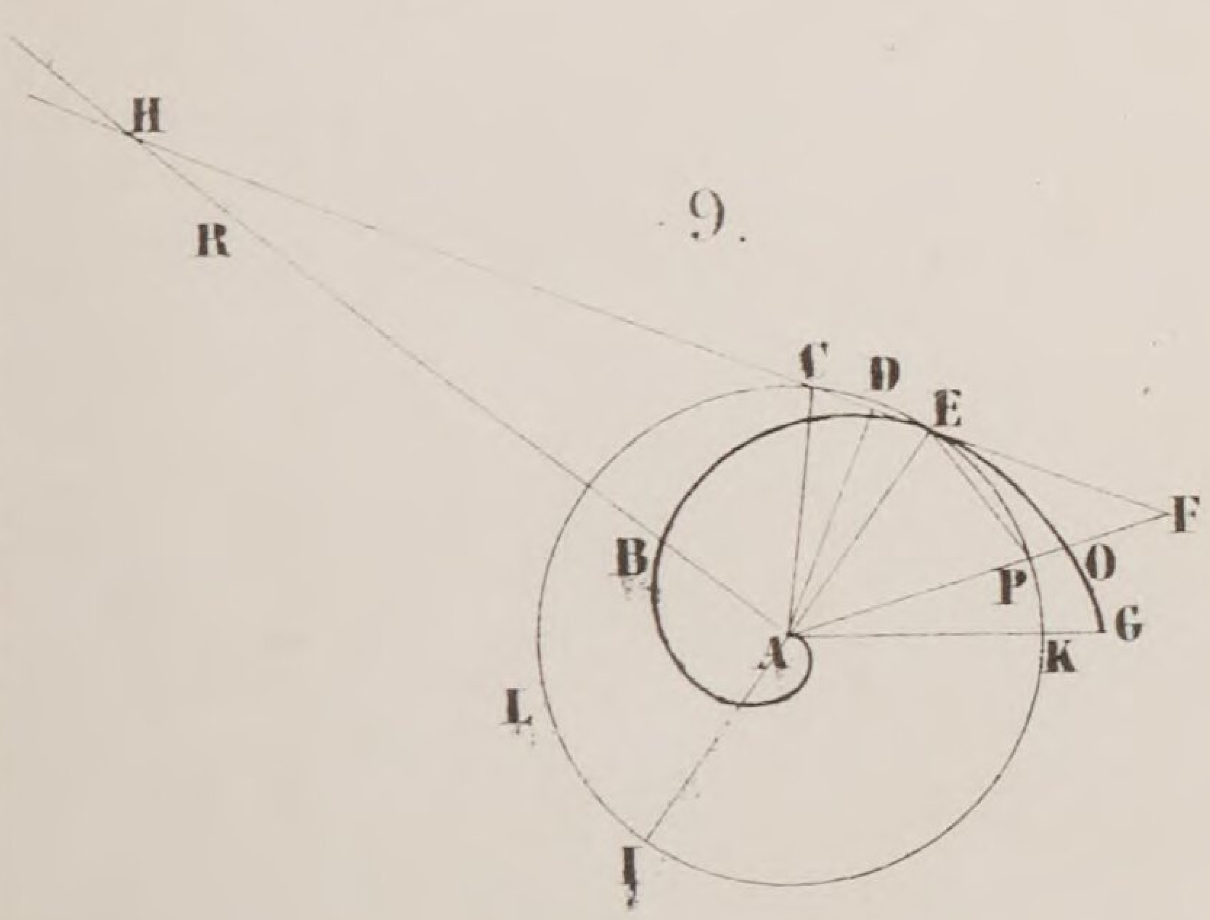
8.


O
D
N
R
C
I
E
e
F
P
B
A
G
M
K
L
H

7.

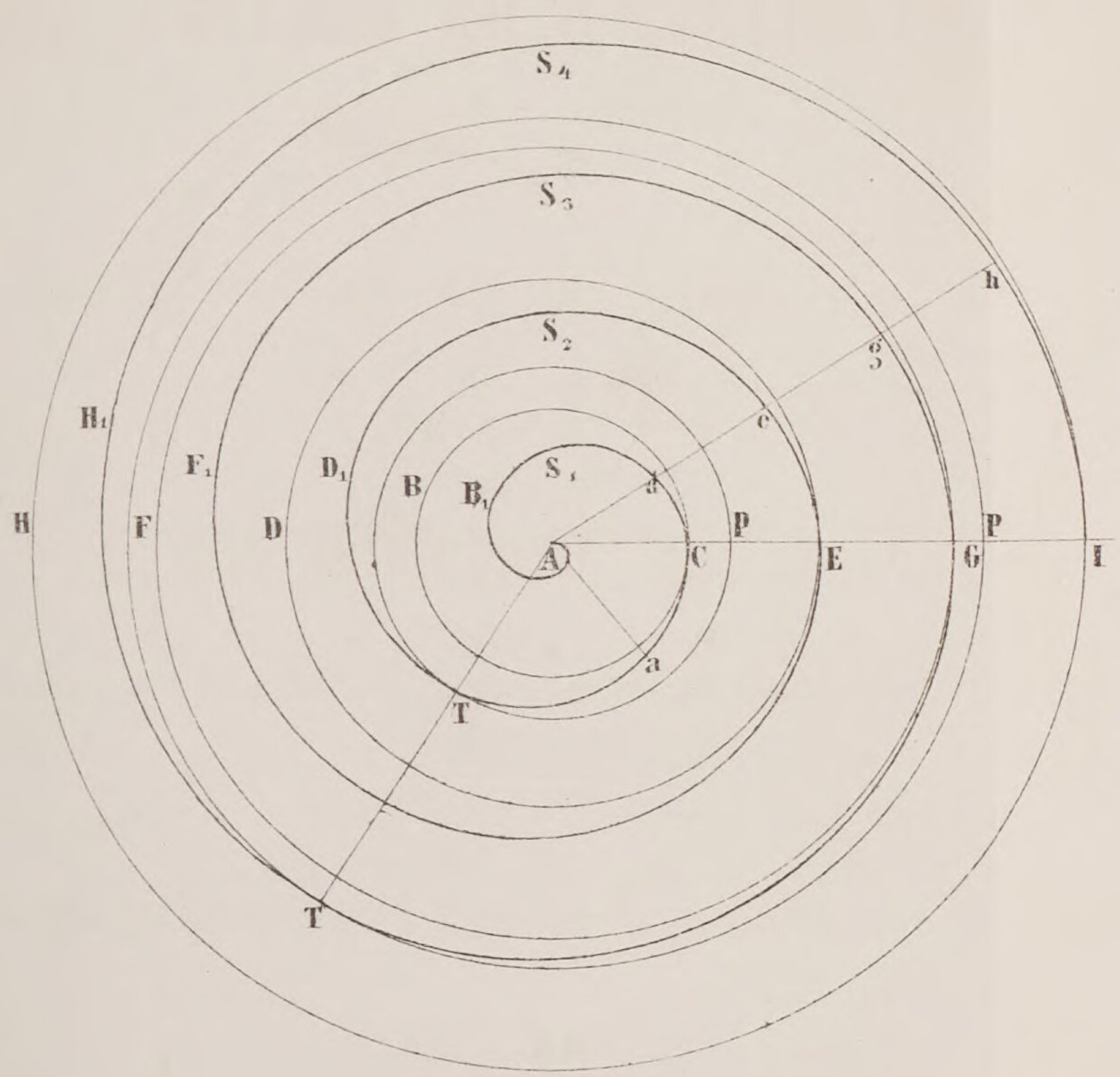

E
e
T
S
V
F
A
G

7a.

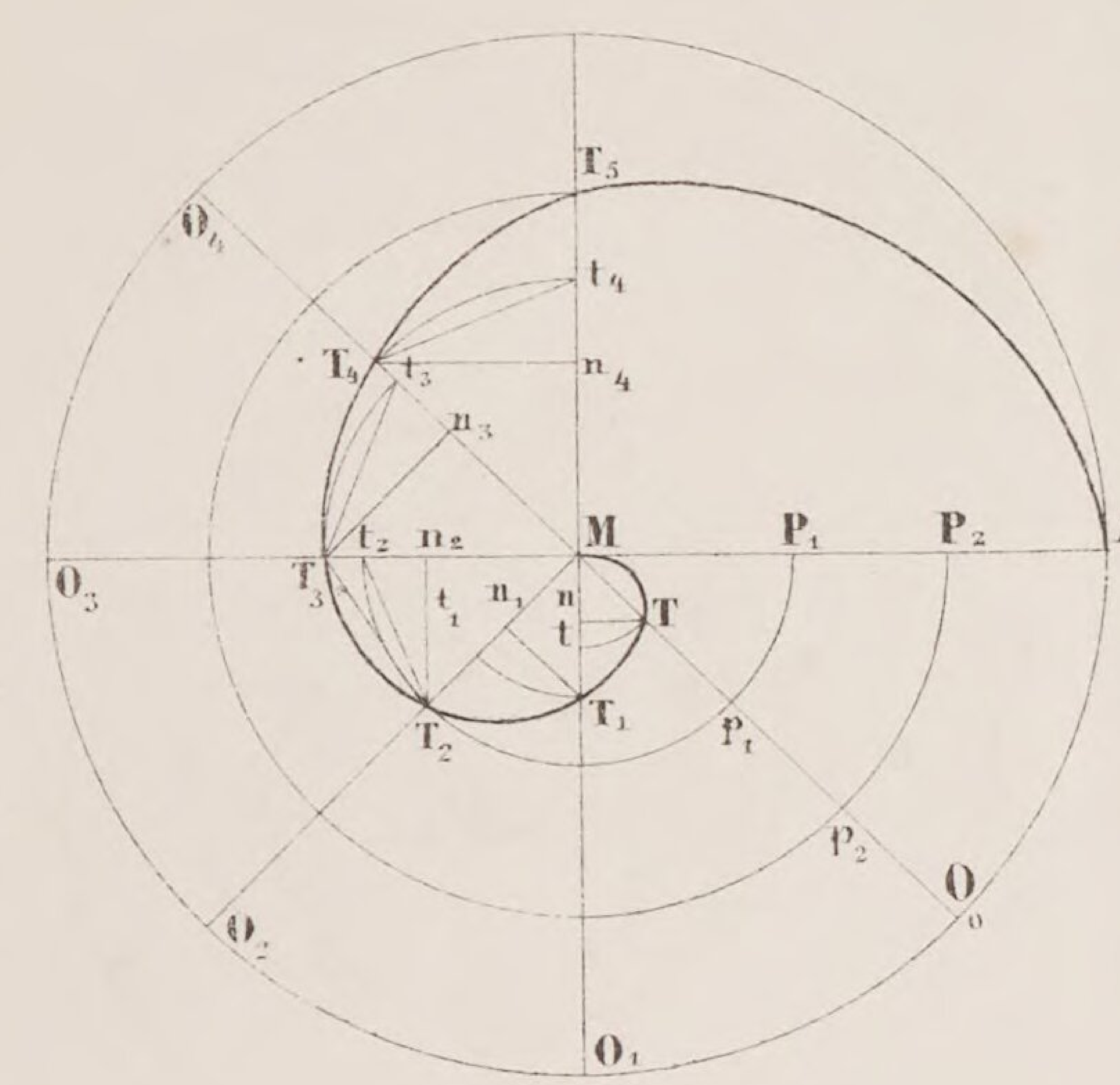

H
R
C
D
E
F
B
P
O
A
K
G
L
I

9.

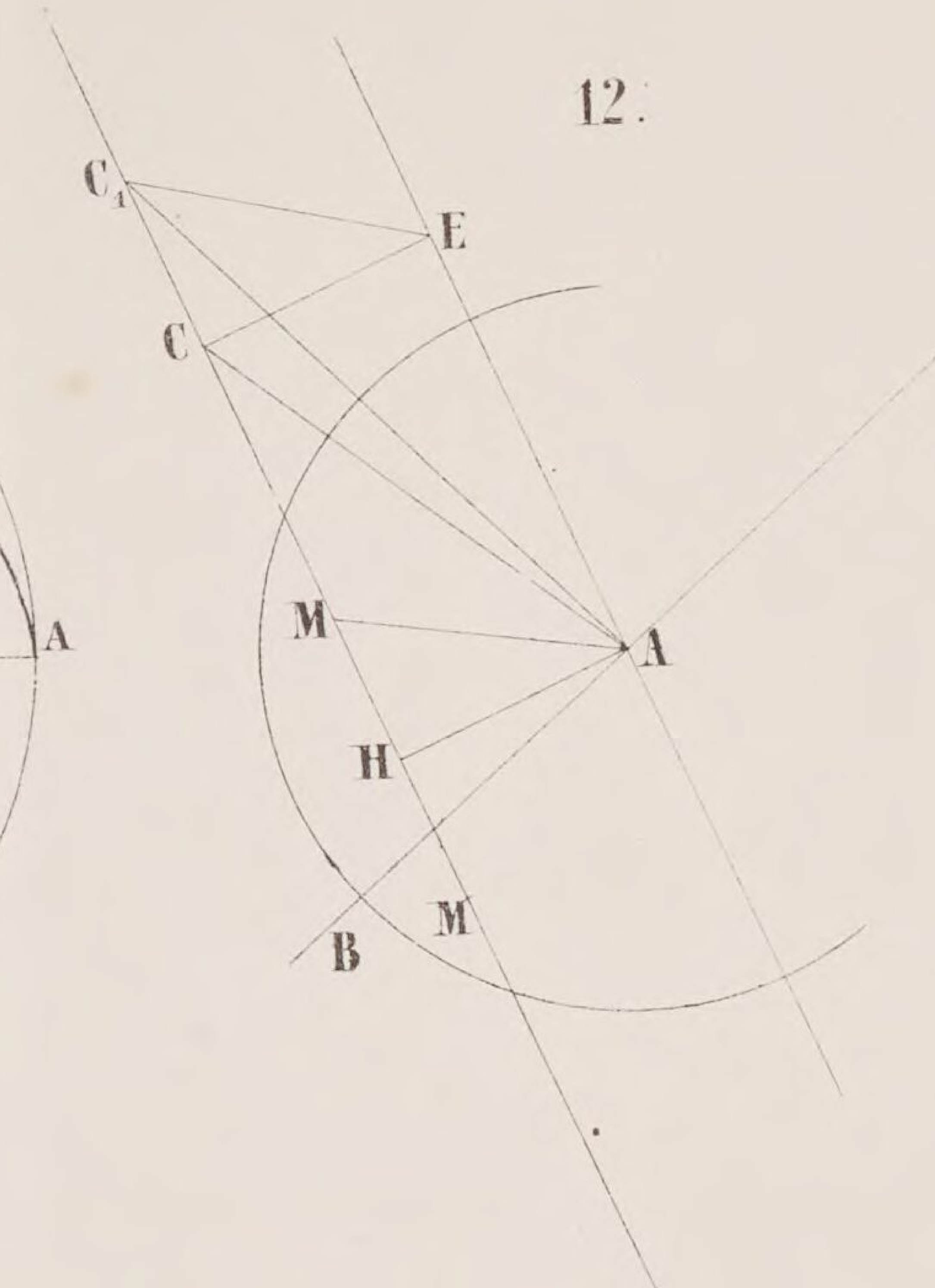
10



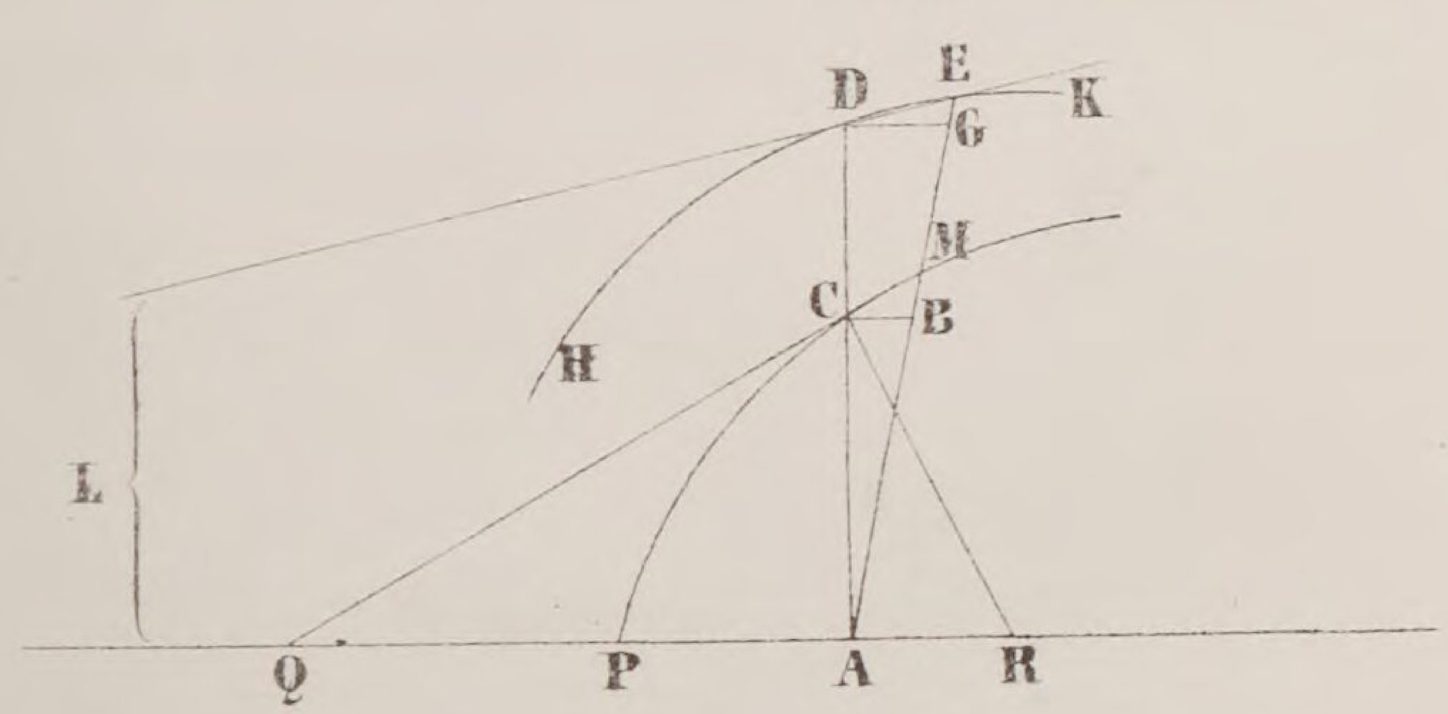
11.



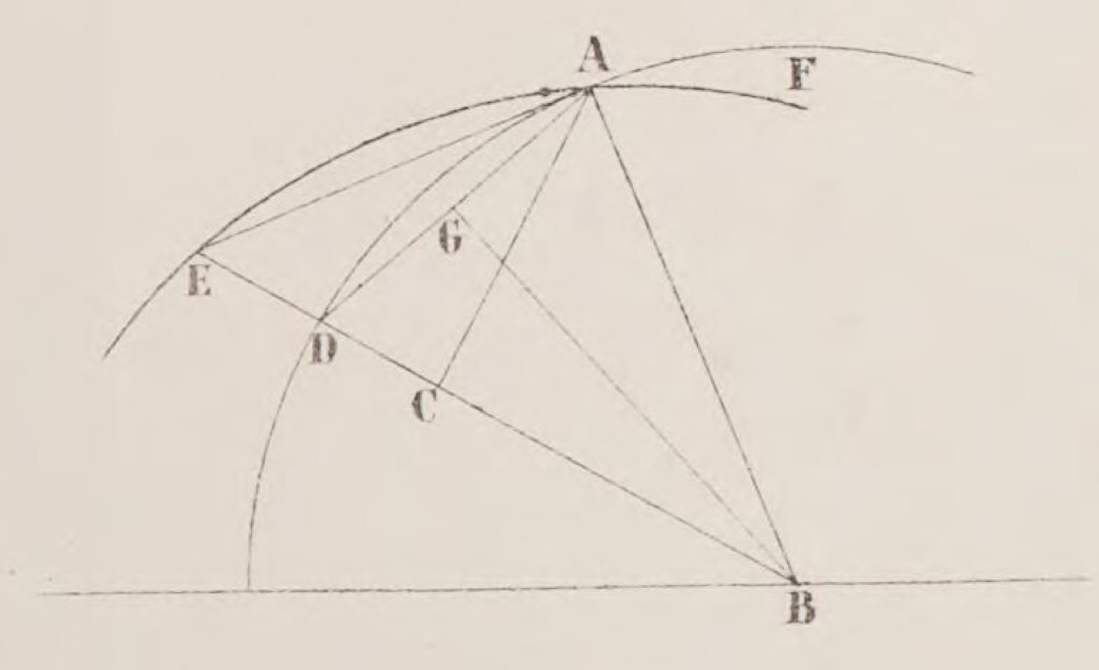
12.



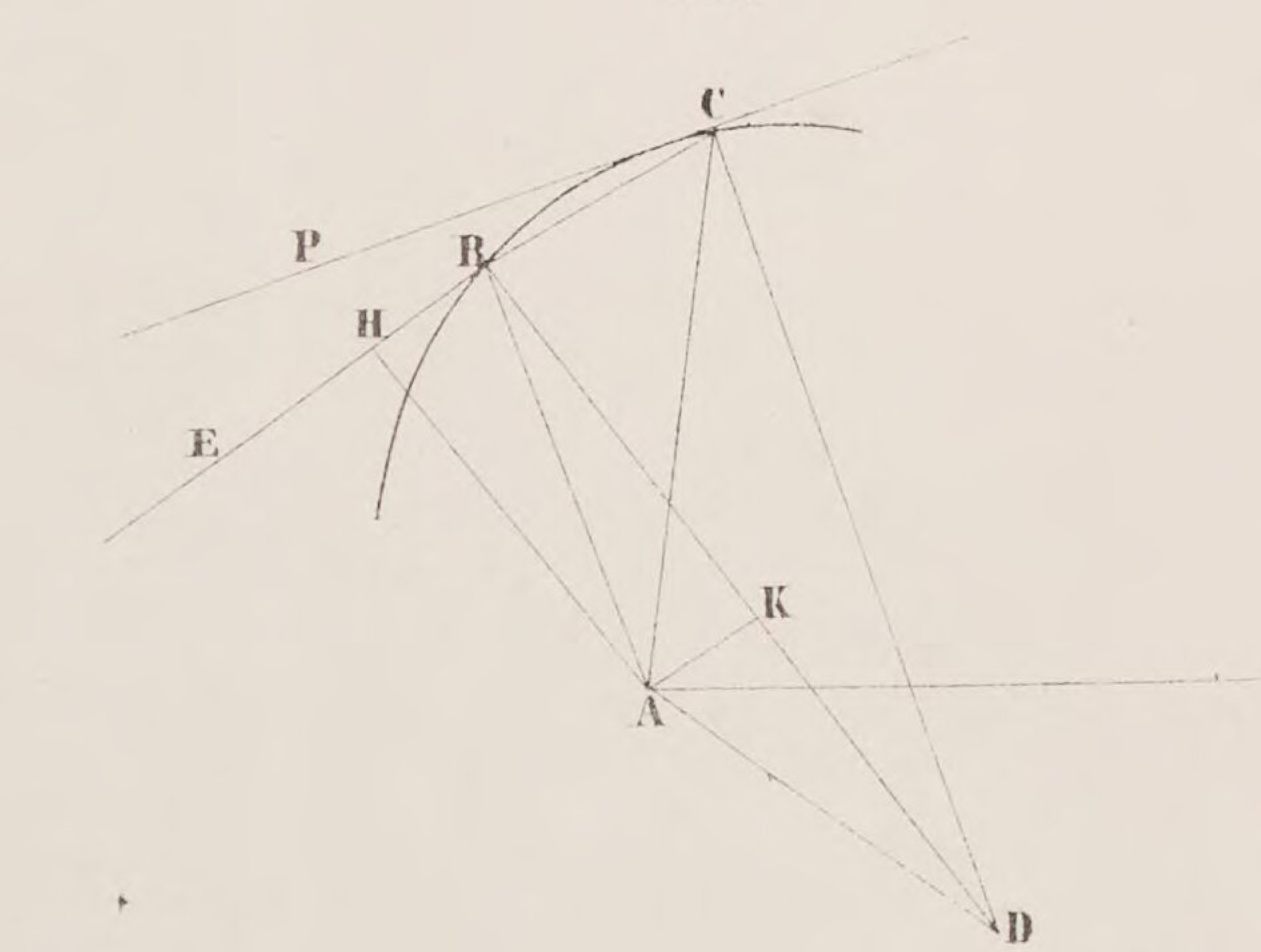
13.



14.



15.



Lehmann, Franz Xaver,

Die Archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte

Freiburg/Br. 1862